



## Section 7 : Fatigue

### Contenu

- Motivation: conception en fatigue
- Caractérisation des matériaux sous chargement cyclique
  - Norme ASTM E-466
  - Définition de la courbe  $S' - N$
- Calculs des facteurs de correction
- Caractéristique du chargement externe
  - Critère de Goodman modifié
  - Chargements combinés → contraintes de von Mises
- Cycles de chargement en fatigue (dommage cumulatif)
  - Loi de Miner

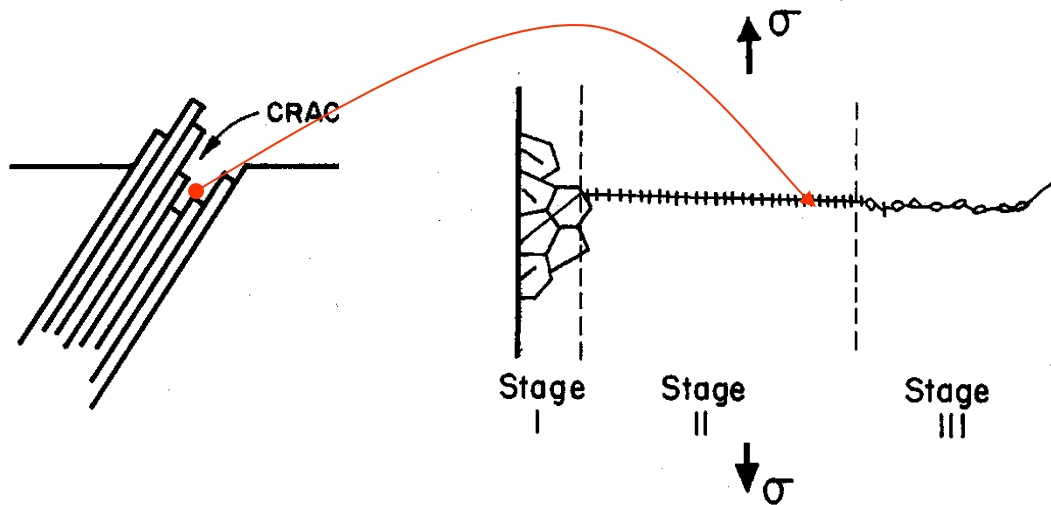


## Motivation : conception en fatigue

- Pour la majorité des applications, les contraintes dans la structure varient dans le temps:
  - en intensité
  - en direction
- Rupture origine habituellement à la surface de la pièce
- Niveau de contrainte ( $S$ ) qui cause la rupture en fatigue est très **souvent inférieur** à  $S_Y$  (matériaux ductiles)
- Rupture se produit sur des pièces après un certain temps de fonctionnement
  - $N$ : nombre de cycle à la rupture

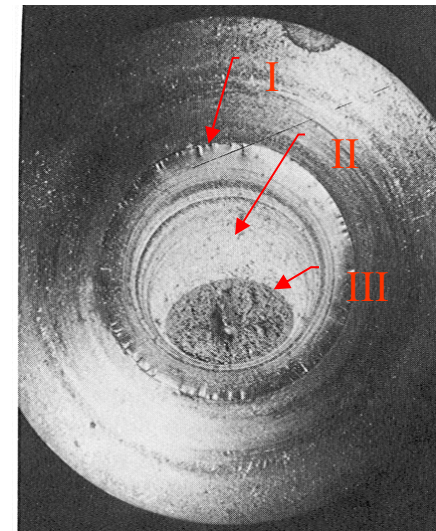
## Mécanisme de rupture en fatigue

- Sous l'effet de contraintes cycliques, les **dislocations** glissent dans le réseau cristallin → formation d'intrusions et d'extrusions en surface et de micro-fissures.



*Glissement des dislocations*

*Initiation (~90%) Propagation (~10%) Rupture finale (1 cycle)*



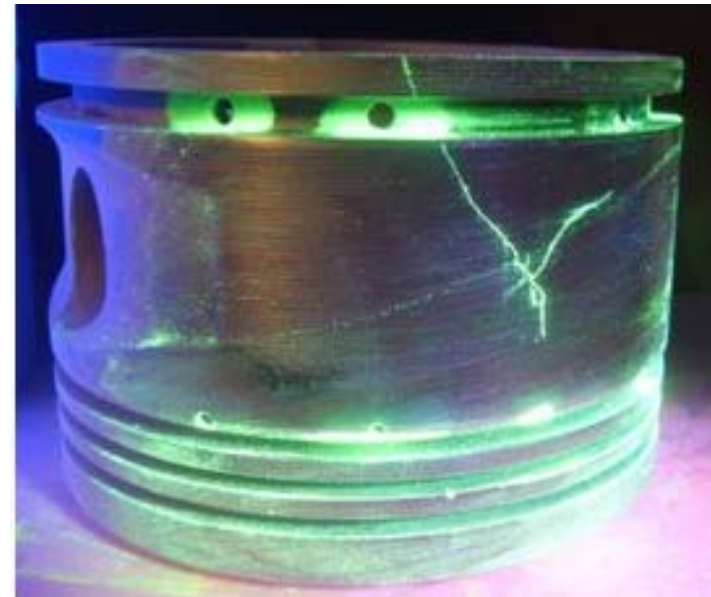
*Faciès de rupture*

# Mécanisme de rupture en fatigue

## Détection des fissures



Fissure sur un engrenage\*



Fissures sur un piston révélées par un pénétrant fluorescent\*

- Ressuage: méthode de contrôle non destructif qui va mettre en évidence les fissures par infiltration de liquide dans les métaux, céramiques et composites
- Autres méthodes: la radiographie, les ultrasons, les procédés à flux de fuite magnétique, etc.

# Exemple: Conception en fatigue

## Suspension d'un véhicule

Matériaux

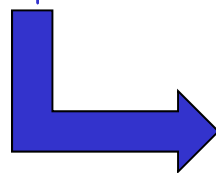
Propriétés statiques ( $S_Y, S_u$ )  
Fatigue (courbe  $S'-N$ )

Structures

Géométrie  
Conditions d'utilisation

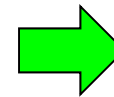
Chargements

Composantes alternées et moyennes  
Analyse des contraintes



Analyse de dommage cumulatif

Loi de Miner

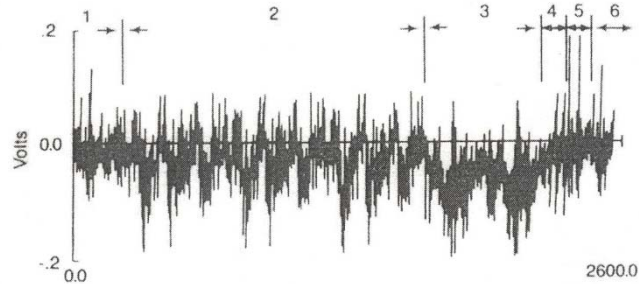


Prédire la durée de vie en fatigue

# Exemple: Conception en fatigue

## Suspension d'un véhicule

Chargement en fonction du temps  
(mesuré par un accéléromètre ou jauge de déformation)



- 1...Empty Running Across Quarry
- 2...3 x Load and Dump Sequences
- 3...2 x Load Carrying Across Quarry Sequences
- 4...2 x Carrying Load Up Grade Sequences
- 5...2 x Carrying Load Down Grade with Severe Brake
- 6...Empty Running Across Quarry

Fig. 3-24 Sample of digitized load history.

Analyse de signaux  
(séparation en cycle de chargement)

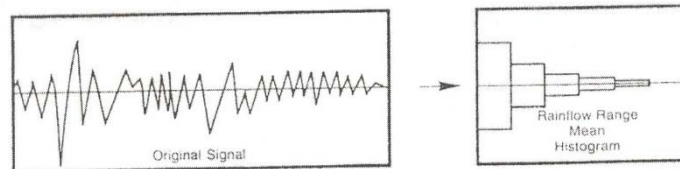


Fig. 5-22 Schematic representation of the process of summarizing a signal for fatigue life prediction.

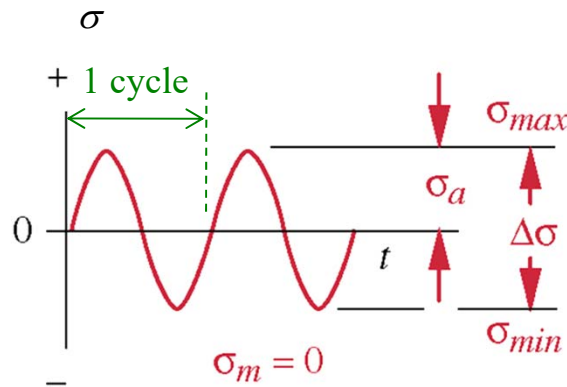


Suspension à poutre d'un véhicule  
(carbible.com)

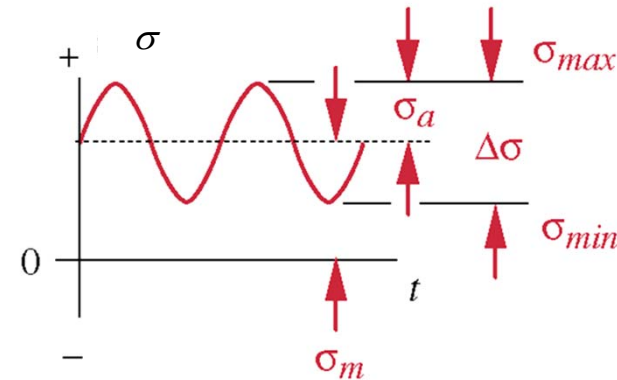
**Domage cumulatif  
avec la loi de Miner**



# Chargement dynamique (variable dans le temps)



Chargement complètement renversé\*



Chargement quelconque

Contrainte moyenne

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$$

Contrainte alternée

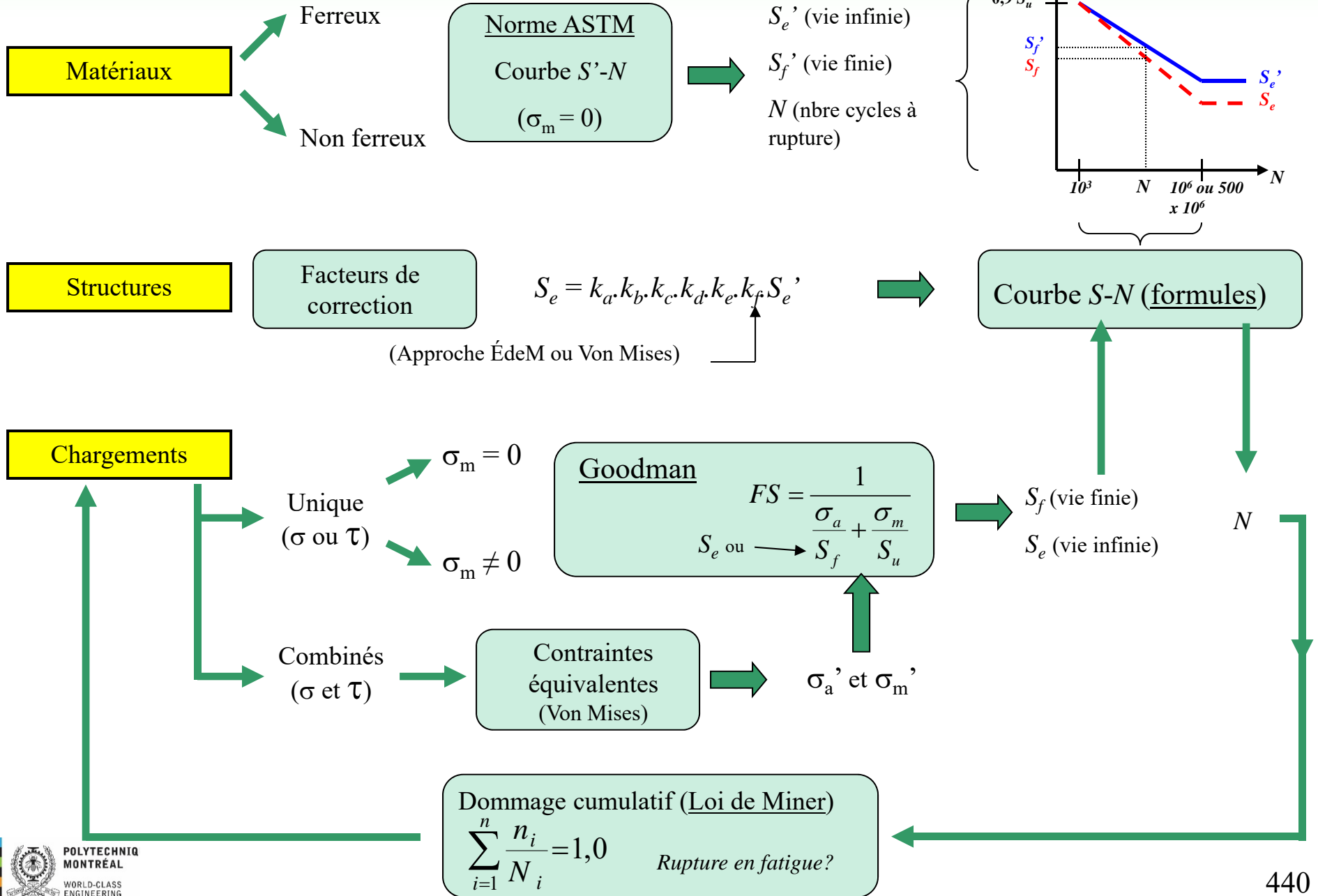
$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$$

Rapport des contraintes

$$R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$$

# Diagramme de l'analyse en fatigue

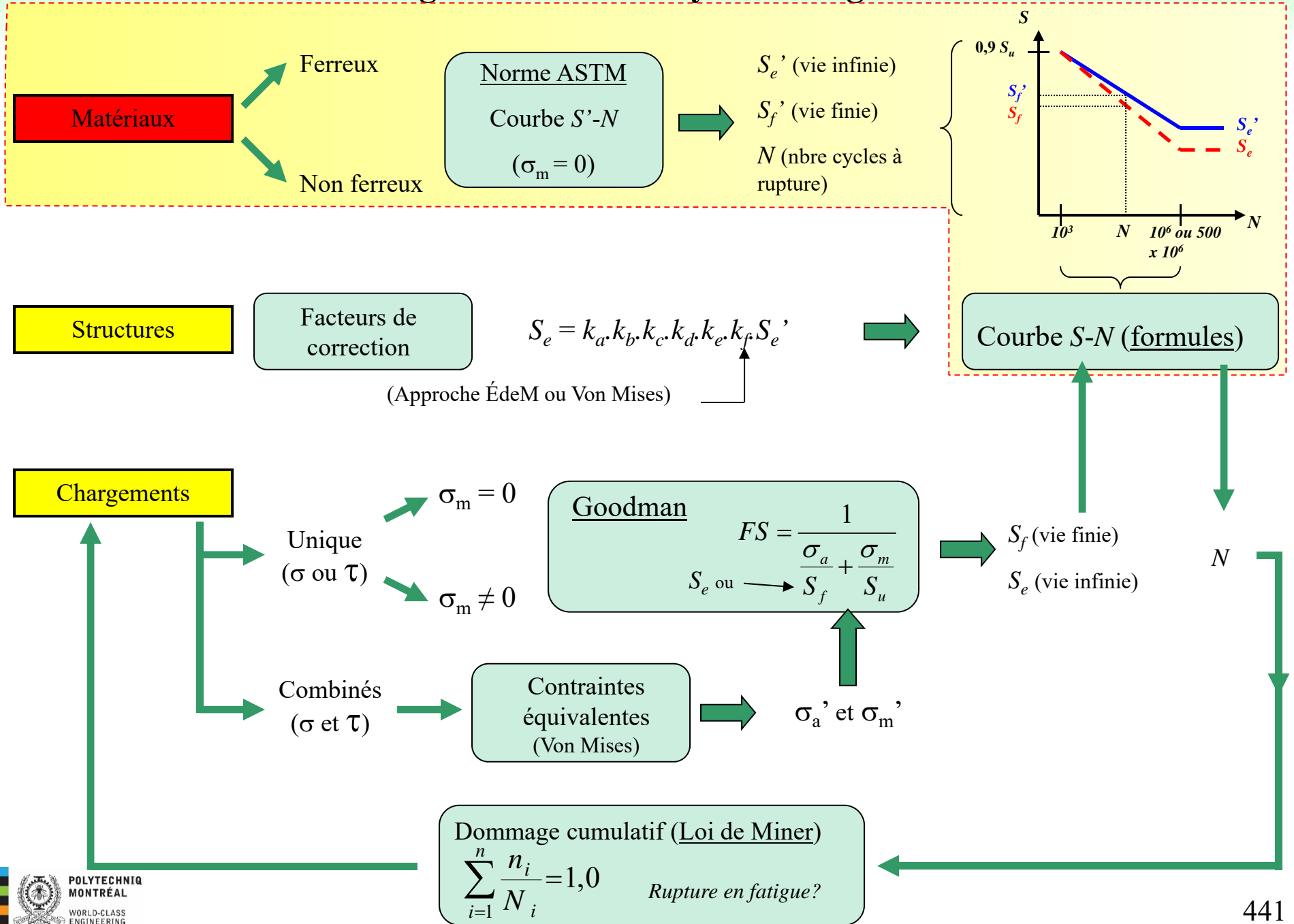
Par D. Therriault (Avril 2005)





# Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



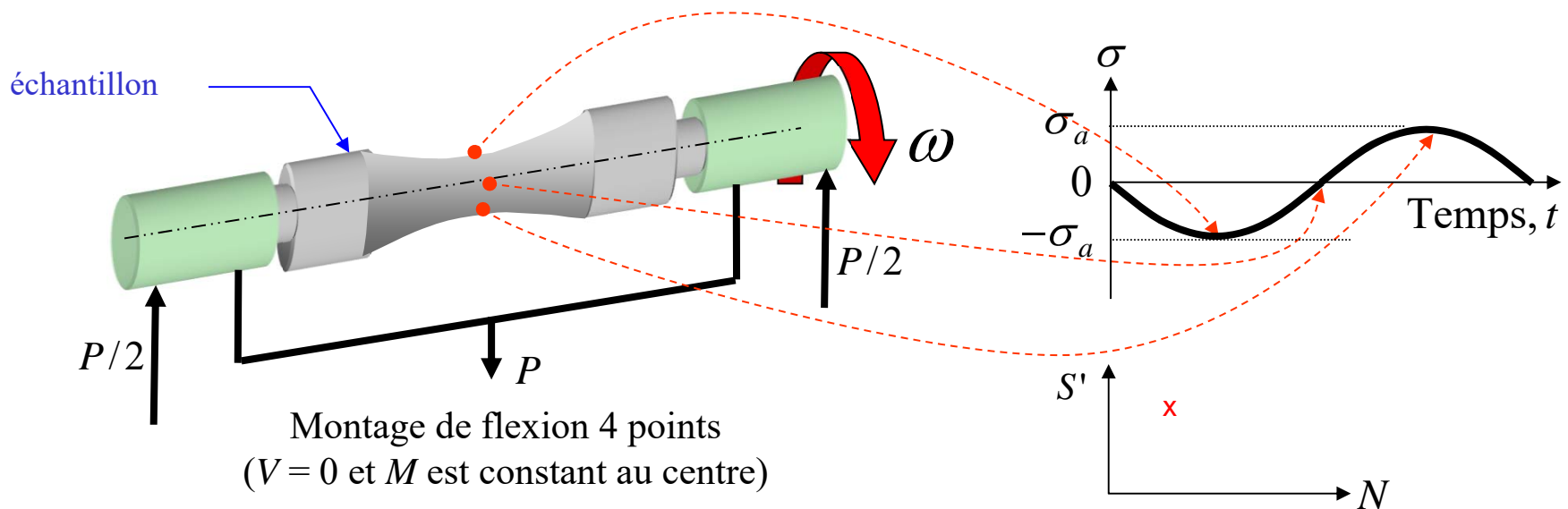


## Introduction de la norme ASTM E-466

- American Society for Testing and Materials (ASTM)
- **Caractérisation des matériaux** en fatigue
  - Obtenir la courbe  $S' - N$  du matériau (contrainte alternée pour un nombre de cycle à la rupture donné)
- Conditions normalisées
  - Chargement variable complètement renversé ( $\sigma_m = 0$ )
  - Contraintes normales seulement
  - Échantillon normalisé (fini de surface, dimensions)
  - Température ambiante ( $T = 25^\circ\text{C}$ )
  - Aucune concentration de contraintes

## Introduction de la norme ASTM E-466

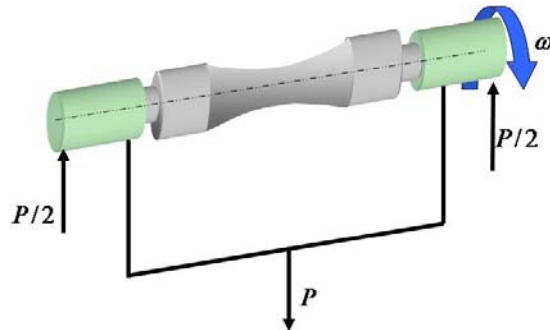
- Montage de flexion rotative (essais à haut cyclage)



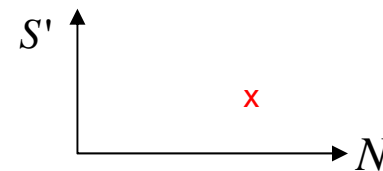
- Chargement variable **complètement renversé** de l'échantillon
- Permet d'accumuler un grand nombre de cycles rapidement
- Faire tourner jusqu'à rupture → un point sur la **courbe  $S' - N$**

## Introduction de la norme ASTM E-466

- Avantage de la flexion rotative : accumuler un grand nombre de cycles en relativement peu de temps
  - En 24 heures, cette machine qui tourne à 10 000 tours/min, accumule 14,4 millions de cycles complètement renversés sur l'échantillon. Il lui faut 35 jours pour accumuler  $500 \times 10^6$  cycles.
  - À 10 Hz, une machine de traction-compression mettrait 1,6 année pour accumuler  $500 \times 10^6$  cycles

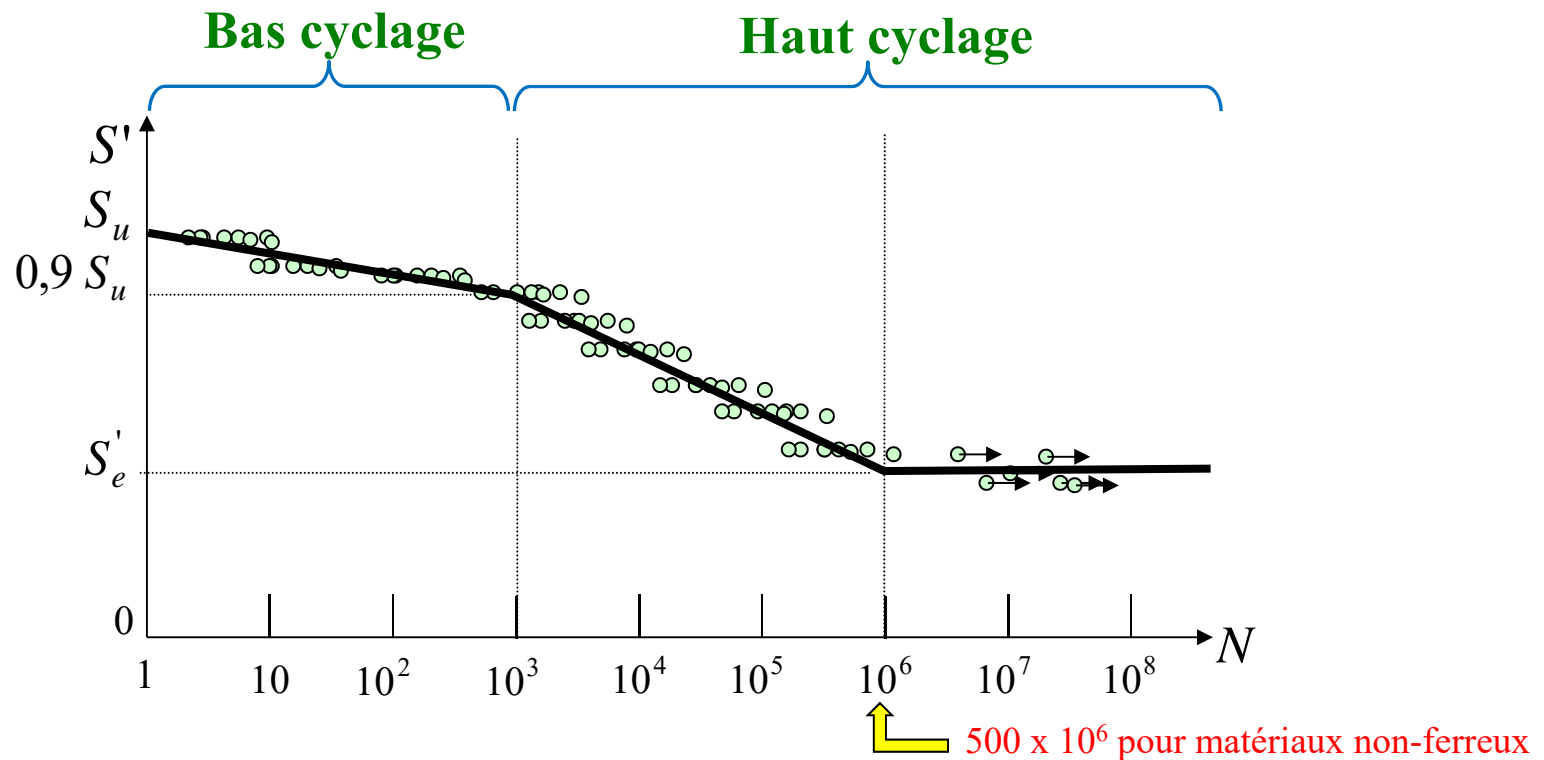


Flexion rotative



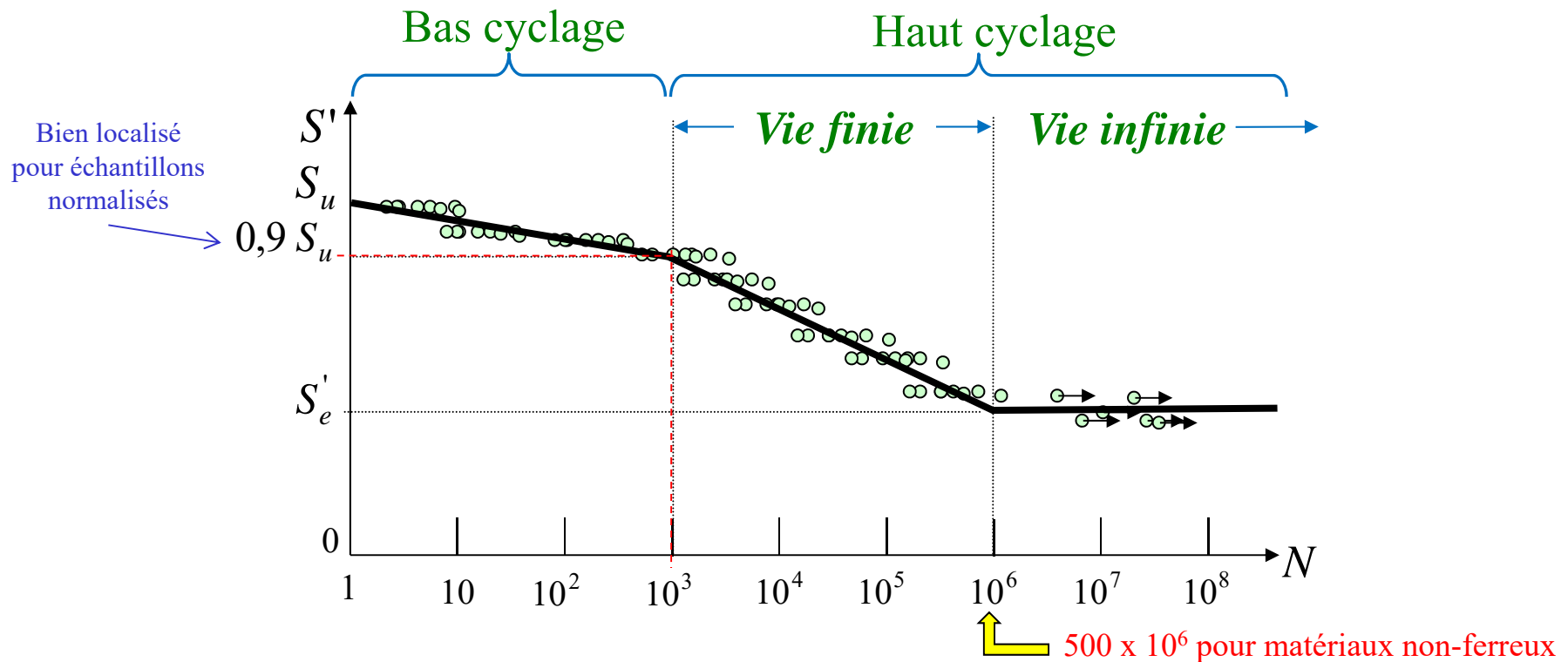
- Selon ces conditions, il faut 35 jours pour obtenir un seul point sur le diagramme  $S' - N$
- Répéter l'essai à différents niveaux de contrainte

# Courbe $S' - N$ : matériaux ferreux et non-ferreux



- Deux zones: (1) **bas cyclage** ( $< 10^3$  cycles) et (2) **haut cyclage** ( $> 10^3$  cycles)
  1. La fatigue à bas cyclage implique des déformations plastiques et dépasse le cadre du cours

# Courbe $S' - N$ : matériaux ferreux et non-ferreux



– Deux zones: (1) bas cyclage ( $< 10^3$  cycles) et (2) haut cyclage ( $> 10^3$  cycles)

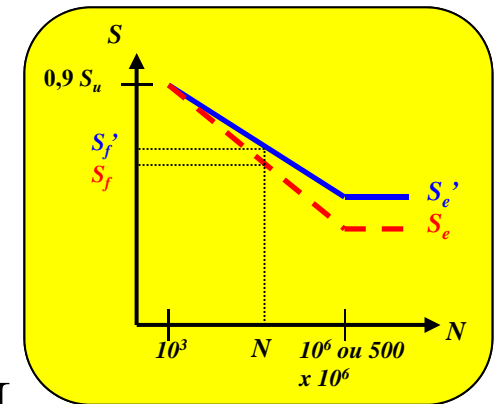
2. La fatigue à haut cyclage est distinguée par la

- *vie finie* (Ferreux:  $10^3$  à  $10^6$  cycles / Non-ferreux:  $10^3$  à  $5 \times 10^8$  cycles)

- *vie infinie* (Ferreux:  $> 10^6$  cycles / Non-ferreux:  $> 5 \times 10^8$  cycles)

## Courbe $S' - N$ : matériaux ferreux et non-ferreux

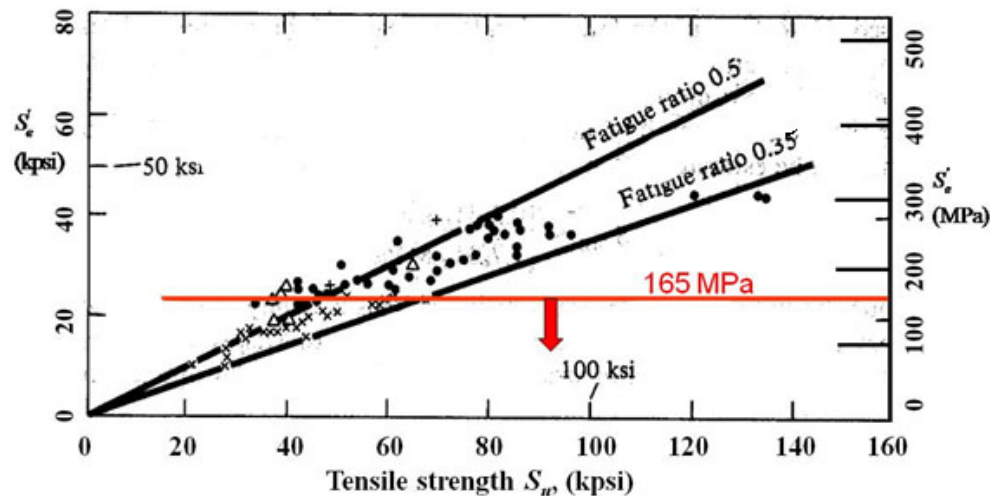
- Deux types de comportement en fatigue:
  - matériaux ferreux (ex. acier, fonte)
  - matériaux non-ferreux (ex. aluminium, polymère)
- $S_f'$ : niveau de contrainte à une vie finie  $N$
- $S_e'$ : limite d'endurance
  - Contrainte complètement renversée en dessous de laquelle il y a peu de chances d'observer une rupture en fatigue
  - Propriétés mécaniques de matériaux (ex.  $S_u$ ,  $S_Y$ )
  - « ' » symbolise valeurs mesurées sur **échantillons normalisés**





## Courbe $S' - N$ : matériaux ferreux et non-ferreux

- $S_e'$ : limite d'endurance
  - Mesurée lors d'un l'essai en fatigue sur un échantillon normalisé (ex. fini de surface lisse, température ambiante)
    - Approche précise mais lente et dispendieuse
  - Approximée par la méthode de compilation
    - Valeur approximative mais rapide et économique



Exemple de l'approche par compilation pour la fonte:

Les valeurs mesurées de  $S_e'$  se situent entre 35 et 50% de la valeur de  $S_u$  (contrainte ultime)



## Courbe $S' - N$ : matériaux ferreux et non-ferreux

- $S_e'$ : Résumé de l'approche par compilation
  - Matériaux ferreux

### Acier au carbone et aciers alliés

$$0,35 S_u < S_e' < 0,60 S_u$$

$$S_e' \approx 0,5 S_u \text{ mais } S_e' < 700 \text{ MPa}$$

### Fontes

$$0,35 S_u < S_e' < 0,50 S_u$$

$$S_e' \approx 0,40 S_u \text{ mais } S_e' < 165 \text{ MPa}$$

- Matériaux non-ferreux

### Aluminium

$$0,35 S_u < S_e' < 0,50 S_u$$

$$\left. \begin{array}{l} S_e' \approx 0,40 S_u \text{ forgé, laminé, usiné} \\ S_e' \approx 0,30 S_u \text{ coulé} \end{array} \right\} \text{ mais } S_e' < 130 \text{ MPa}$$

### Alliages de cuivre

$$0,35 S_u < S_e' < 0,50 S_u$$

$$S_e' \approx 0,40 S_u \text{ mais } S_e' < 100 \text{ MPa}$$

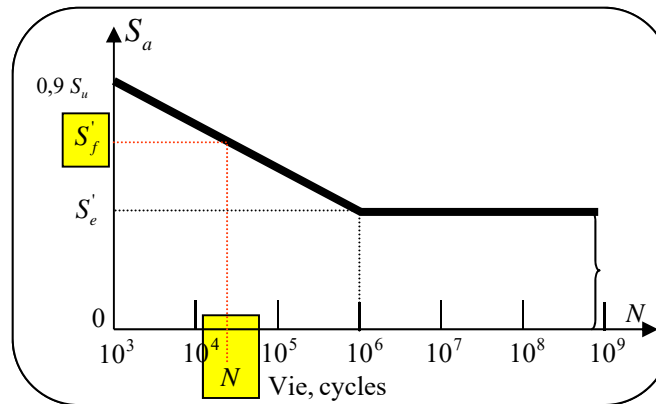


## Résumé des diagrammes $S'-N$

- Fatigue à bas cyclage de fatigue vs. haut cyclage ( $>10^3$  cycles)
- Matériaux ferreux
  - Vie finie  $< 10^6$  cycles
    - $S' = 0,9S_u$  à  $N = 10^3$  cycles ;  $S_e'$  à  $N = 10^6$  cycles
  - Vie infinie  $> 10^6$  cycles
- Matériaux non ferreux
  - Vie finie  $< 500 \times 10^6$  cycles
    - $S' = 0,9S_u$  à  $N = 10^3$  cycles ;  $S_e'$  à  $N = 500 \times 10^6$  cycles
  - Vie infinie  $> 500 \times 10^6$  cycles

## Courbe $S' - N$ : matériaux ferreux

- Calculer



Ces équations sont obtenues à l'aide de la pente de la droite sur le graphique log-log dans le régime de vie finie

- le niveau de contrainte lorsqu'on connaît  $N$

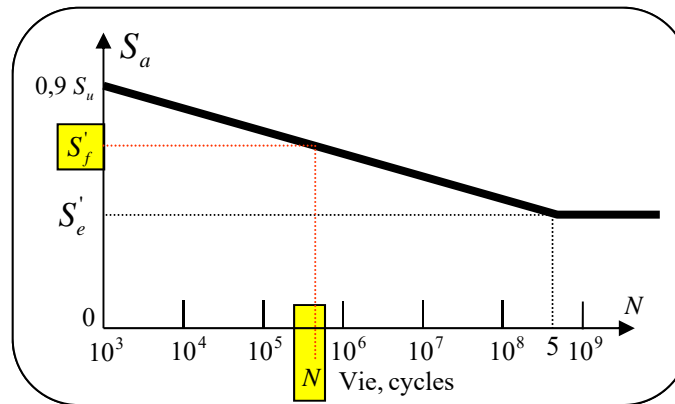
$$\log S'_f = \log \left[ 0,9 S_u \left( \frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)^{(1/3)(\log N - 3)} \right] \quad S'_f = 0,9 S_u \left( \frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)^{(1/3)(\log N - 3)}$$

- le nombre de cycle à la rupture lorsqu'on connaît  $S'_f$

$$\log N = 3 \left[ 1 + \frac{\log \left( \frac{S'_f}{0,9 S_u} \right)}{\log \left( \frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)} \right] \quad N = 10^3 \left( \frac{S'_f}{0,9 S_u} \right)^{\frac{3}{\log(S'_e/0,9 S_u)}}$$

## Courbe $S' - N$ : matériaux non-ferreux

- Calculer



Ces équations obtenues à l'aide de la pente de la droite sur le graphique log-log dans le régime de vie finie

- le niveau de contrainte lorsqu'on connaît  $N$

$$\log S'_f = \log \left[ 0,9 S_u \left( \frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)^{\frac{(\log N - 3)}{5,7}} \right] \quad S'_f = 0,9 S_u \left( \frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)^{\frac{(\log N - 3)}{5,7}}$$

- le nombre de cycle à la rupture lorsqu'on connaît  $S'_f$

$$\log N = 3 + 5,7 \frac{\log \left( \frac{S'_f}{0,9 S_u} \right)}{\log \left( \frac{S'_e}{0,9 S_u} \right)} \quad N = 10^3 \left( \frac{S'_f}{0,9 S_u} \right)^{\frac{5,7}{\log(S'_e / 0,9 S_u)}}$$



## Facteurs de correction ( $S_e$ )

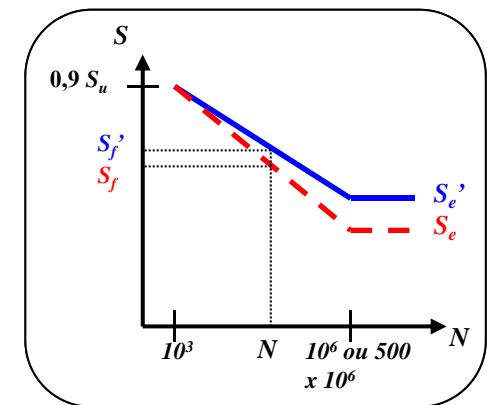
- La limite d'endurance obtenue avec un échantillon *normalisé* ( $S_e'$ ) en *dimensions* et en *fini de surface* dans un essai à amplitude de contrainte *complètement renversée* ne correspond pas nécessairement aux conditions de service de la structure à analyser
- En service :
  - la pièce n'a pas nécessairement le même fini de surface
  - la pièce n'a pas les mêmes dimensions
  - la valeur de la limite d'endurance varie autour d'une moyenne
  - la température peut différer de celle du laboratoire
  - il peut y avoir des concentrations de contraintes dans la pièce
  - le milieu dans lequel se trouve la pièce peut être corrosif ou agressif

## Facteurs de correction ( $S_e$ )

La limite d'endurance *corrigée* se calcule :

$$S_e = k_a k_b k_c k_d k_e k_f S'_e$$

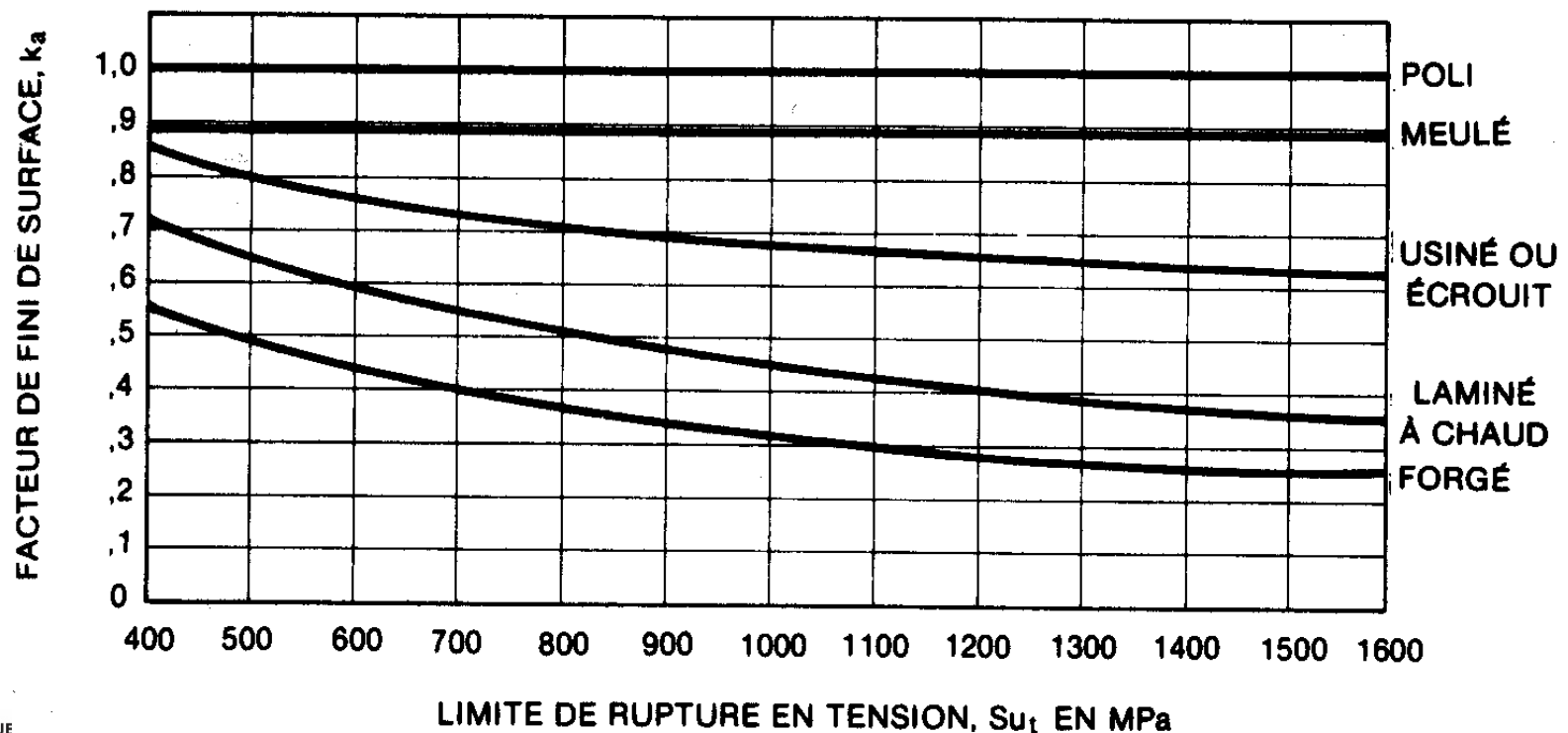
- $k_a$  = pour le fini de surface
- $k_b$  = pour l'effet de grosseur
- $k_c$  = pour la fiabilité, les limites de variation de  $S'_e$
- $k_d$  = pour l'effet de température
- $k_e$  = pour l'effet des concentrations de contrainte
- $k_f$  = pour des effets divers





## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- $k_a$  : fini de surface
  - Un matériau plus résistant, moins ductile a plus de sensibilité à des défauts laissés en surface par le procédé de mise en forme.



## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- $k_b$  : influence de la grosseur de la pièce
  - Statistiquement, un plus grand volume de matériau sous contrainte contient un plus grand nombre d'imperfections
  - Ces imperfections peuvent engendrer une microfissure et initier une rupture par fatigue
  - Pour les sections non-circulaires, il faut calculer un diamètre équivalent
  - Pour les sections circulaires:

### Chargement axial

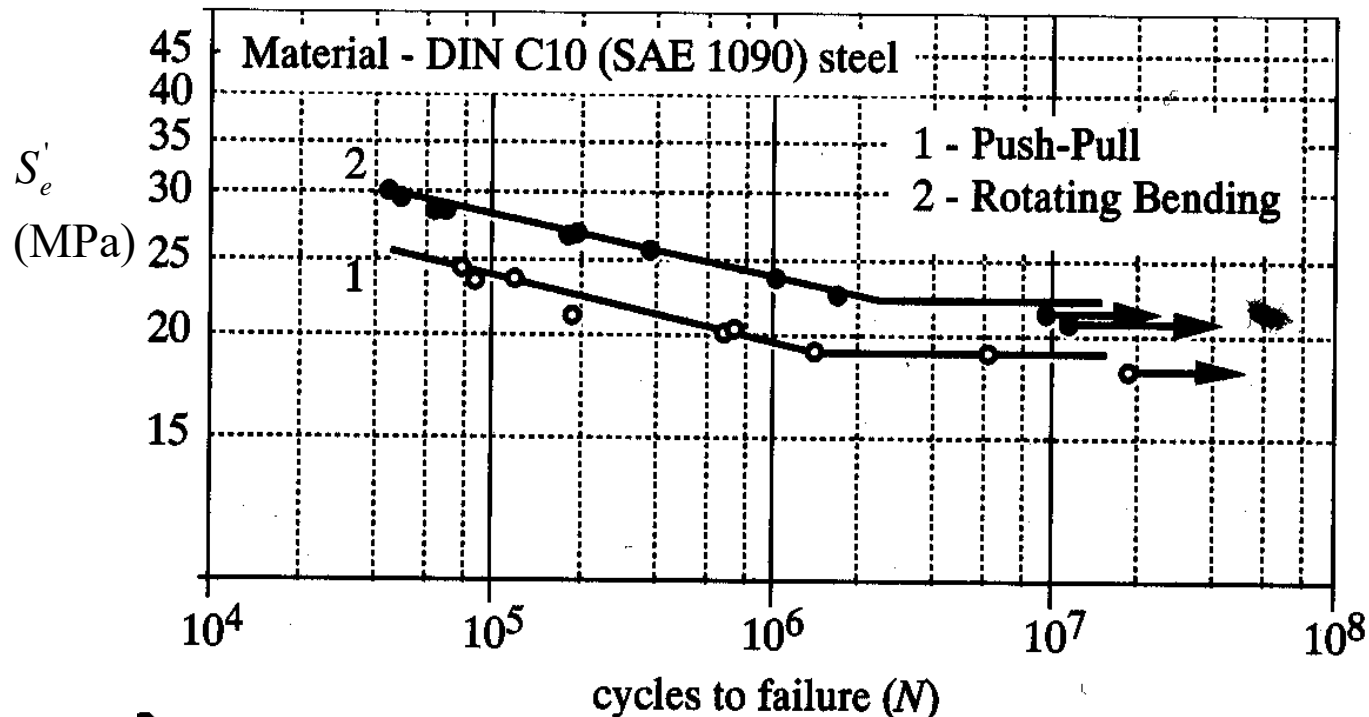
$$k_b = 1,0$$

### Flexion et /ou torsion

$$k_b = \begin{cases} 1 & d \leq 7,6 \text{ mm} \\ 0,85 & 7,6 < d \leq 50 \text{ mm} \\ 0,75 & d > 50 \text{ mm} \end{cases}$$

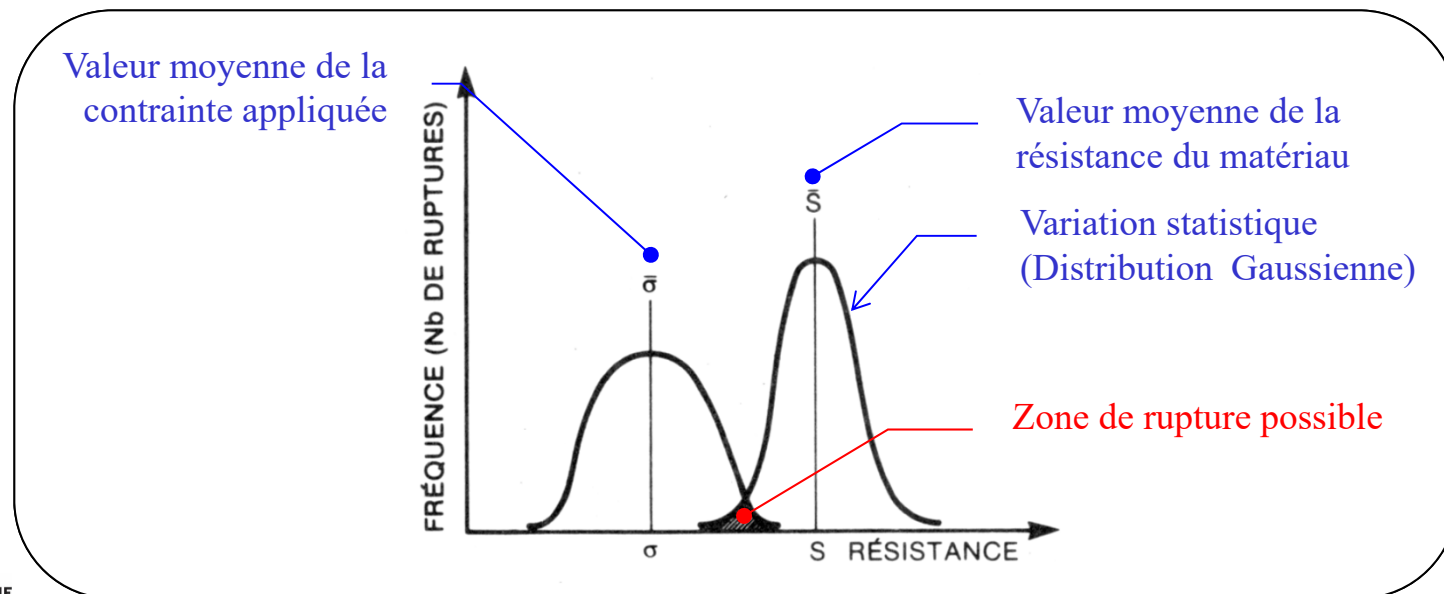
## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- $k_b$  : influence de la grosseur de la pièce
  - Effet du type d'essai pour mesurer  $S_e'$   $(S_e')_{uniaxial} = 0,7 (S_e')_{flexion}$



## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- $k_c$  : fiabilité
  - Modifier la valeur moyenne de  $S_e$  pour l'adapter à la fiabilité que l'on veut accorder au calcul de la pièce
    - Contrainte appliquée et la résistance du matériau varient selon une distribution Gaussienne



## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- $k_c$  : fiabilité
  - Fiabilité = 50% lorsqu'on utilise valeur moyenne de  $S_e'$  ( $k_c=1$ )
  - On utilise une valeur plus petite de  $k_c$  pour augmenter la fiabilité en fatigue de la structure (voir tableau)

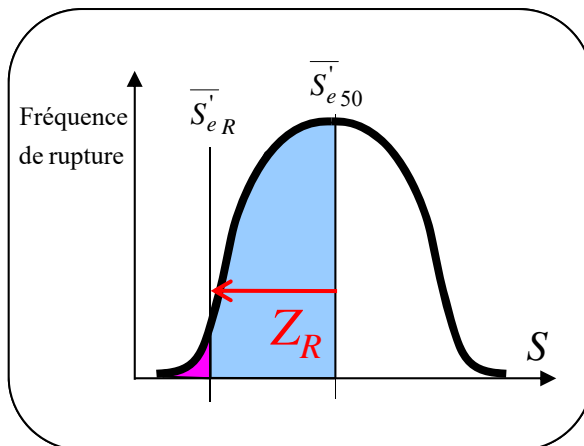


Tableau pour facteur  $k_c$  (Drouin et al.)

TABLEAU 5.1

Fiabilité (R)	Variable normalisée ( $Z_R$ )	Facteur de fiabilité ( $k_c$ )
0,50	0	1,000
0,90	1,288	0,897
0,95	1,645	0,868
0,99	2,326	0,814
0,999	3,091	0,753
0,9999	3,719	0,702
0,99999	4,265	0,659
0,999999	4,753	0,620
0,9999999	5,199	0,584
0,99999999	5,612	0,551
0,999999999	5,997	0,520

## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- $k_d$  : effet de la température
  - Effet de la température est très complexe. Les conséquences des températures élevées sont :
    - fluage (ex. déplacement des dislocations dans le réseau cristallin, amorce de micro fissures)
    - perte de rigidité à cause d'une chute du module d'Young
    - perte de dureté par réarrangement du réseau cristallin
    - perte de résistance ultime  $S_u$  ou d'écoulement  $S_Y$

*Formule suggérée  
pour évaluer l'effet  
de la température*

$$k_d = \begin{cases} \frac{344}{273 + T} & \text{pour } T > 71^{\circ}C \\ 1,0 & \text{pour } T < 71^{\circ}C \end{cases}$$



## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- $k_f$  : effets divers
  - Les effets divers comprennent :
    - les contraintes résiduelles
    - les milieux agressifs (ex. eau, acides, alcalins, radiations)
  - Ces effets doivent être étudiés cas par cas et ne seront pas traités ici (donc,  $k_f = 1$  pour notre cours).



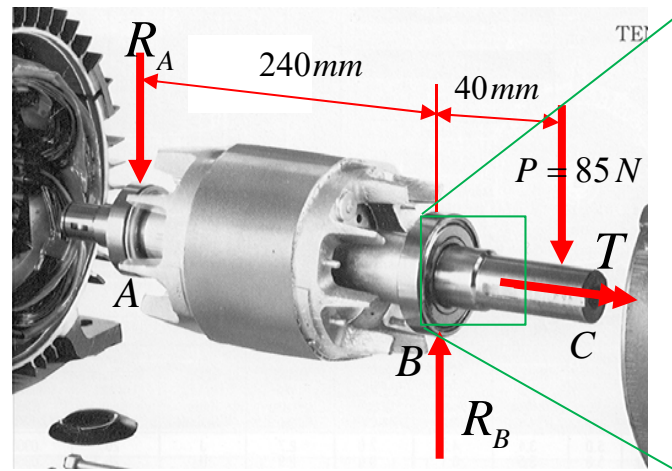
## Exemple

# Arbre du moteur d'une soufflante

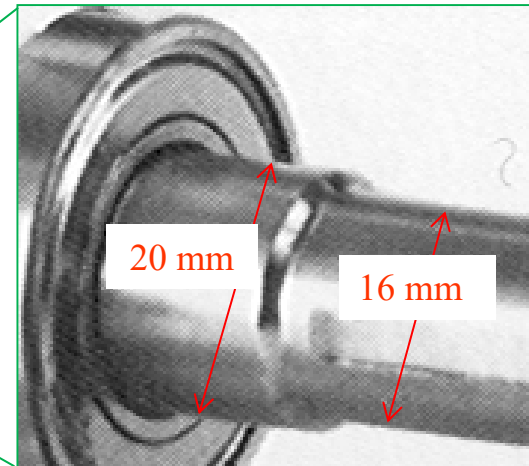
- L'arbre du moteur d'une soufflante est usiné dans un acier au carbone G10150, dureté  $H_B = 111$  et pour lequel  $S_Y = 190$  MPa et  $S_u = 340$  MPa. Pour cette application, l'ingénieur juge qu'une fiabilité de 90% est adéquate. En opération, l'arbre peut atteindre une température de  $80^\circ\text{C}$ . Quelle est la valeur de  $S_e$ ?



Image de la soufflante



Arbre et chargement externe



Dimensions de l'arbre

# Exemple

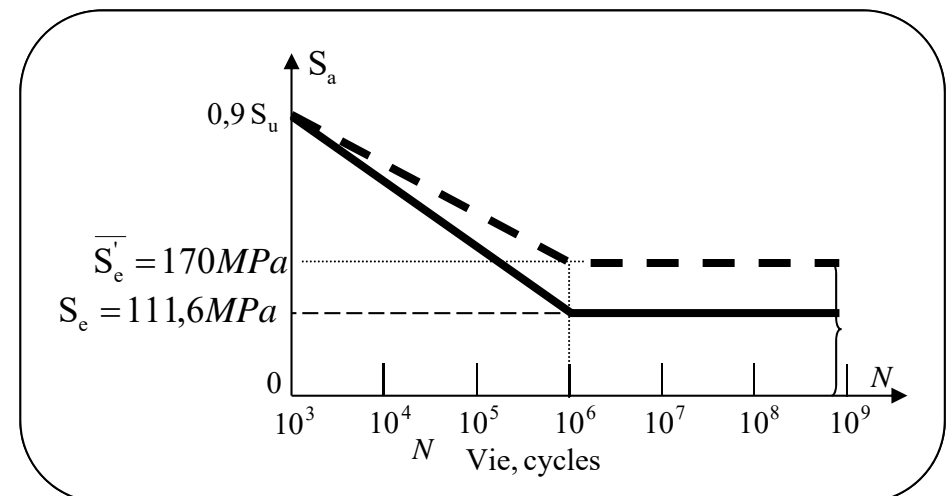
## Arbre du moteur d'une soufflante

### • Solution

- $S_e' = 0,5 S_u = 0,5 * 340 = 170 \text{ MPa}$  (selon l'approche par compilation)
- $k_a = 0,88$  (selon graphique p.467)
- $k_b = 0,85$  (selon formule p.468, chargement flexion et torsion)
- $k_c = 0,90$  (selon tableau p.471)
- $k_d = 344 / (273+80) = 0,975$  (selon formule p.472)
- $k_f = 1$  (selon p.473)

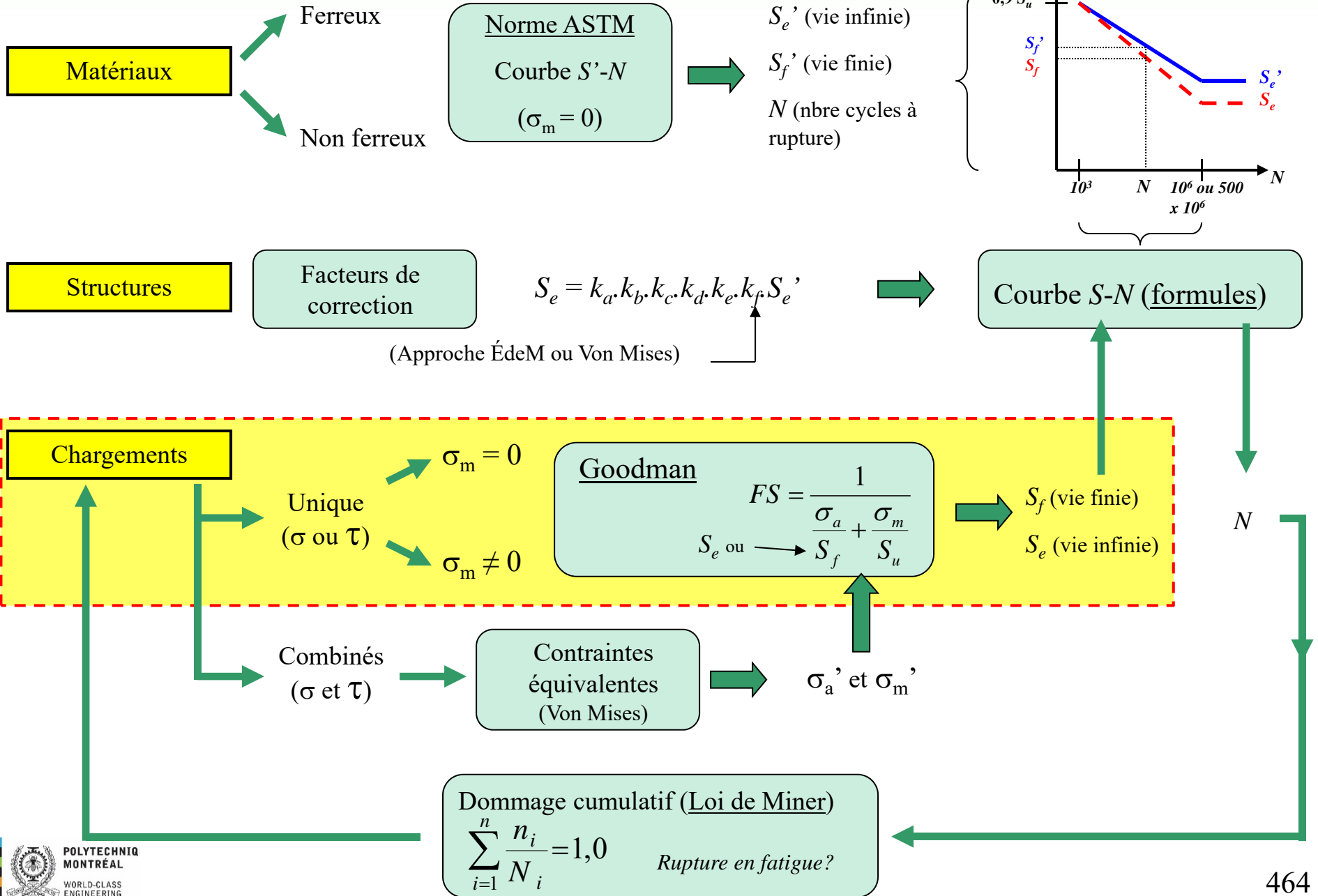
$$S_e = 0,88 \times 0,85 \times 0,90 \times 0,975 \times 1,0 \times 1,0 \times 170 = 111,6 \text{ MPa}$$

Par comparaison,  
 $S_Y = 190 \text{ MPa}$



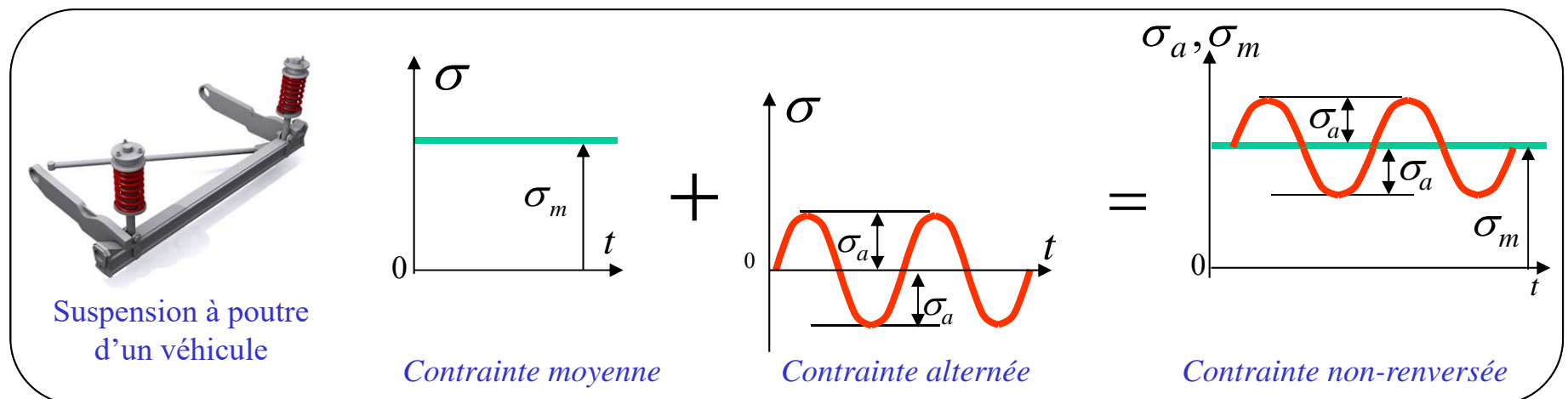
# Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



## Critère de Goodman: contrainte non-renversée

- La résistance en fatigue d'un échantillon normalisé est mesurée à l'aide d'un essai à amplitude de contrainte complètement renversée.
- Il est possible que la structure à étudier ne soit pas soumise à un chargement complètement renversé





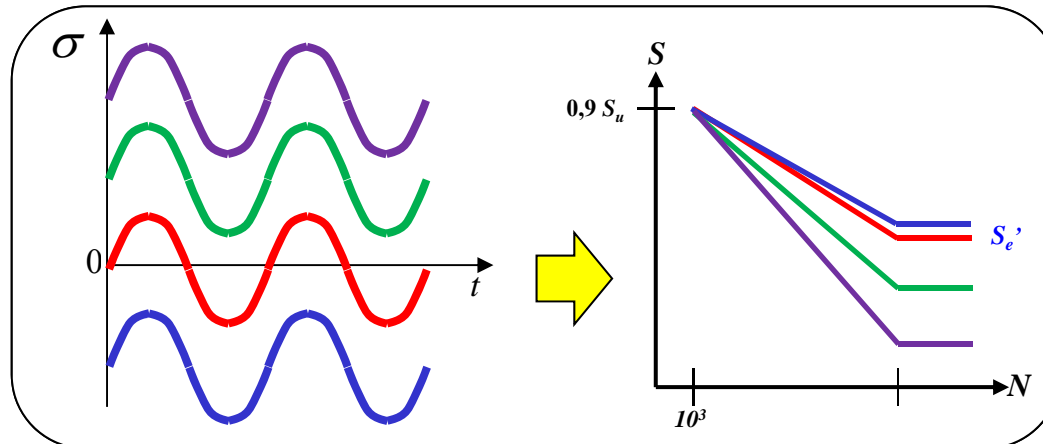
## Critère de Goodman: contrainte non-renversée

- Deux cas extrêmes
  - Pour une **contrainte statique**, la rupture se produit à un cycle ( $N = 1$ ) lors que la charge égale  $S_u$
  - Pour une **contrainte variable complètement renversée**, la rupture se produit à  $N$  cycles en fonction de la charge appliquée  $S_f$  (vie finie) ou  $S_e$  (vie infinie)
- Que fait-on lorsque les deux composantes de la contrainte sont présentes?

## Critère de Goodman: contrainte non-renversée

- Des essais expérimentaux ont démontré que la présence d'une contrainte moyenne superposée à une contrainte variable change la vie en fatigue du matériau
  - Si  $\sigma_m > 0$ , la vie en fatigue diminue
  - Si  $\sigma_m < 0$ , la vie en fatigue augmente
- Nous utiliserons l'approche conservatrice que le comportement en fatigue demeure le même lorsque  $\sigma_m < 0$ .

*Par rapport à  $\sigma_m = 0$*



# Critère de Goodman: contrainte non-renversée

## Approche pour obtenir le critère de Goodman

Courbes  $S - N$  d'un aluminium pour différentes valeurs de  $\sigma_m$



Courbes  $\sigma_a$  en fonction de  $\sigma_m$  à une vie constante



Normalisation de l'axe  $\sigma_a$  par rapport à  $S_f$  ou  $S_e$

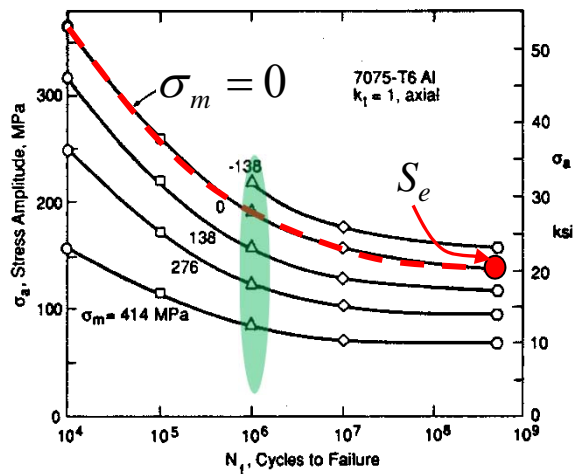


Figure 9.25 Axial loading  $S-N$  curves at various mean stresses for unnotched specimens of an aluminum alloy. The curves connect average fatigue strength for a number of lots of material. (Data from [Howell 55].)

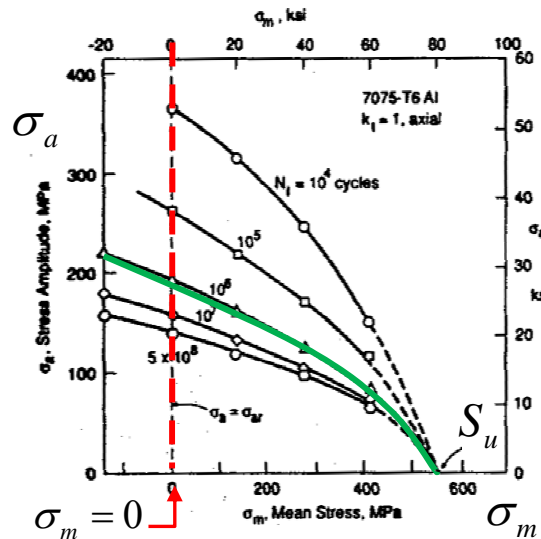


Figure 9.34 Constant-life diagram for 7075-T6 Al taken from the  $S-N$  curves of Fig. 9.25.

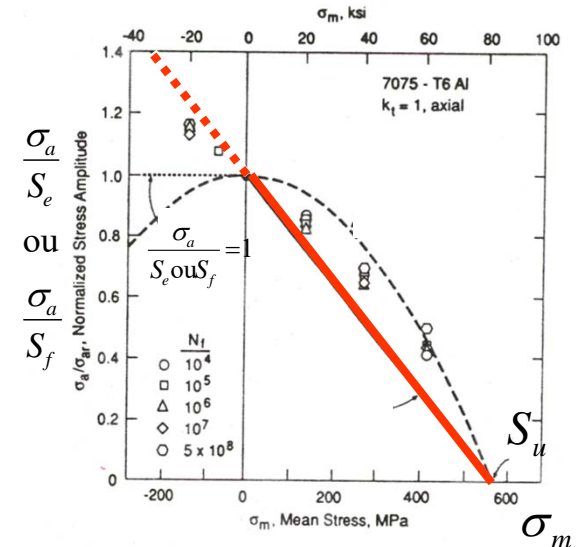


Figure 9.38 Normalized amplitude-mean diagram for 7075-T6 Al based Fig. 9.34.

À  $\sigma_a = 0$ ;  $\sigma_m = S_u$  et  
à  $\sigma_m = 0$ ;  $\sigma_a = S_f$  ou  $S_e$

- Les valeurs normalisées se superposent
- Équation de la droite = critère de Goodman



# Critère de Goodman: contrainte non-renversée

## Approche pour obtenir le critère de Goodman

- Pour  $\sigma_m > 0$ , l'équation de la droite est

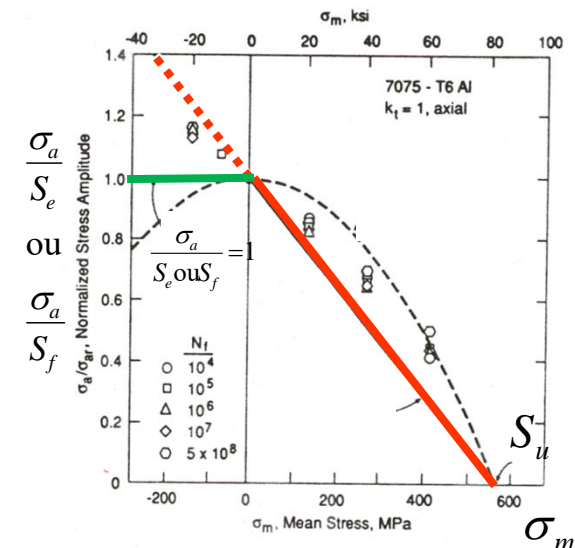
– Vie finie 
$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

– Vie infinie 
$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

- Pour  $\sigma_m < 0$ , on pose  $\sigma_m = 0$  et l'équation du critère de rupture en fatigue devient

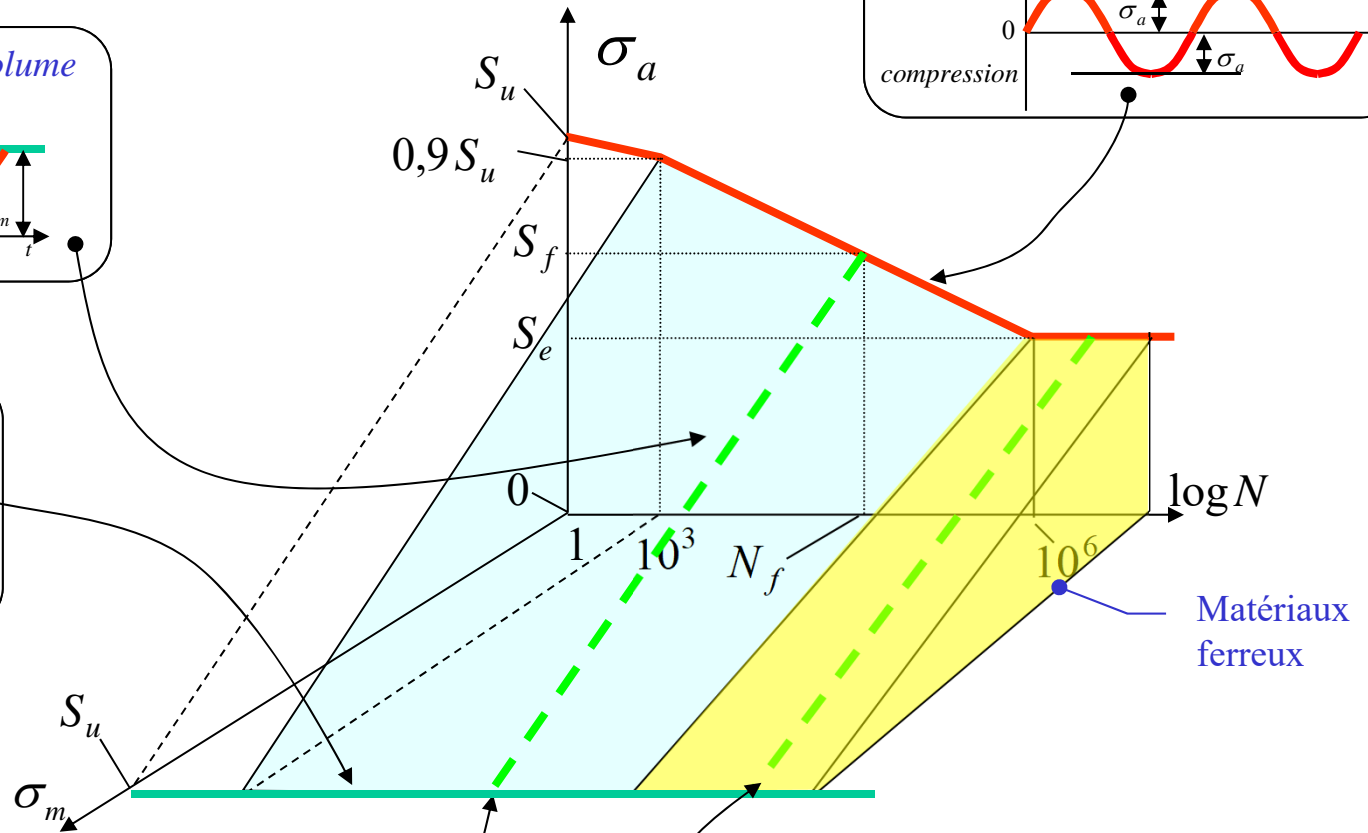
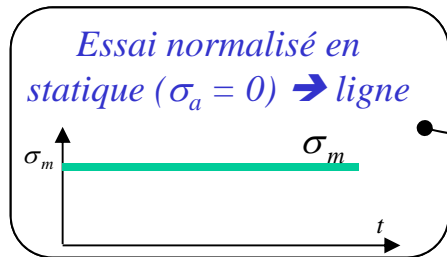
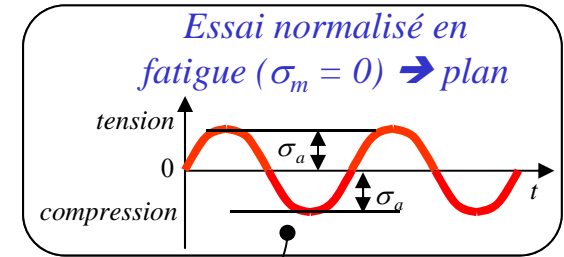
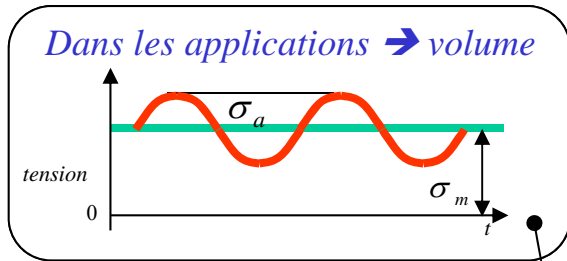
$$\frac{\sigma_a}{S_f} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{\sigma_a}{S_e} = 1$$

Normalisation de l'axe  $\sigma_a$  par rapport à  $S_f$  ou  $S_e$



- Les valeurs normalisées se superposent
- Équation de la droite = critère de Goodman

# Résumé



Goodman (vie finie)

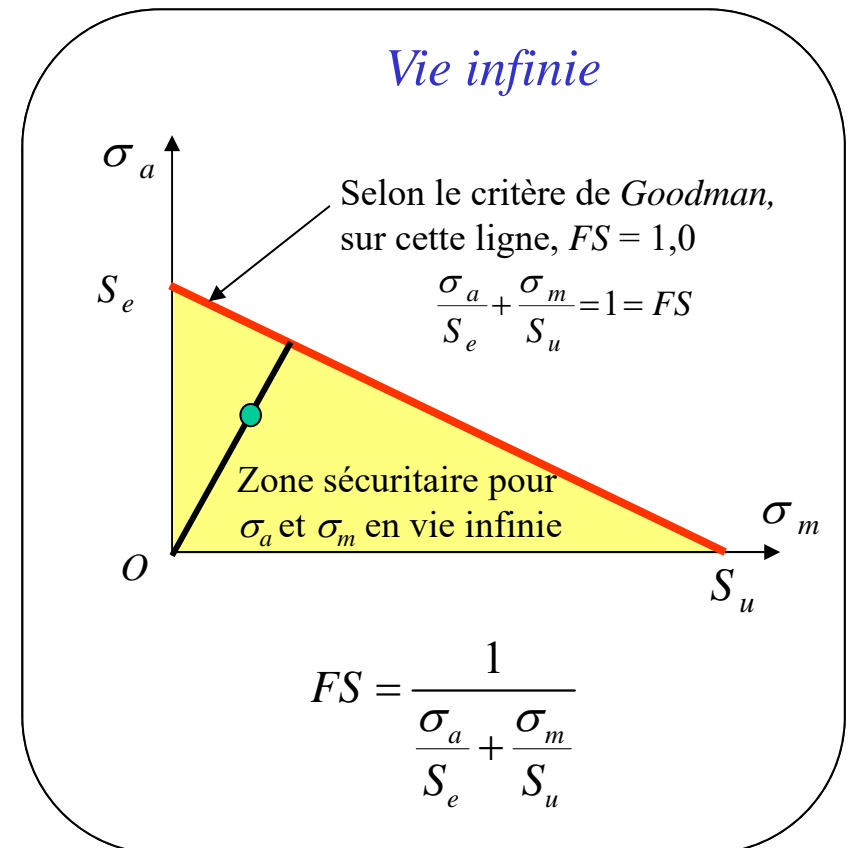
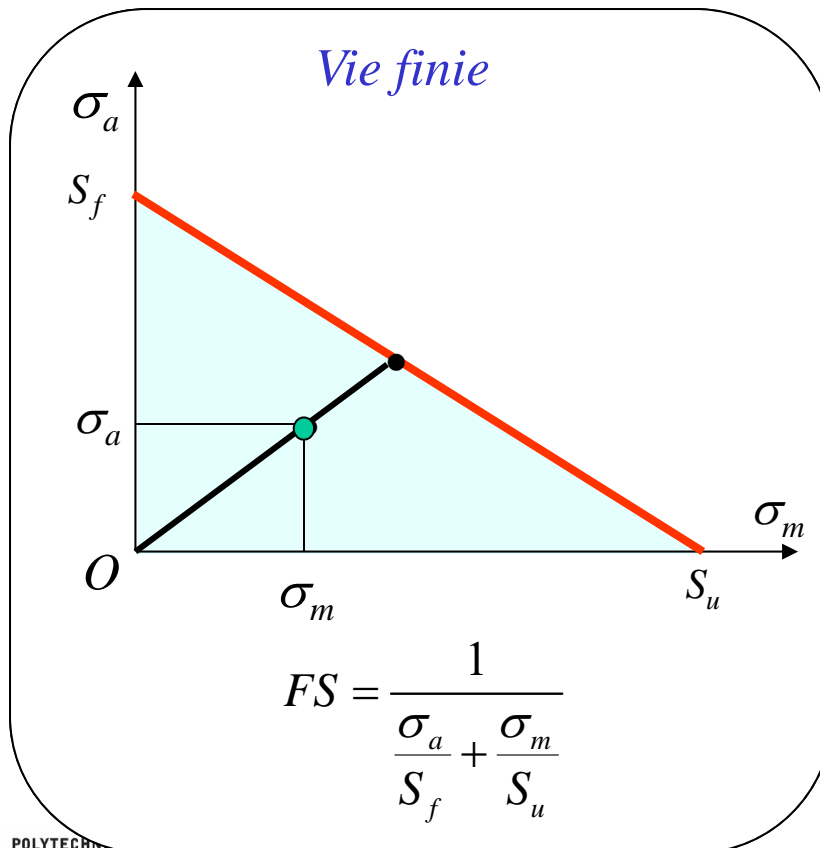
$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

Goodman (vie infinie)

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

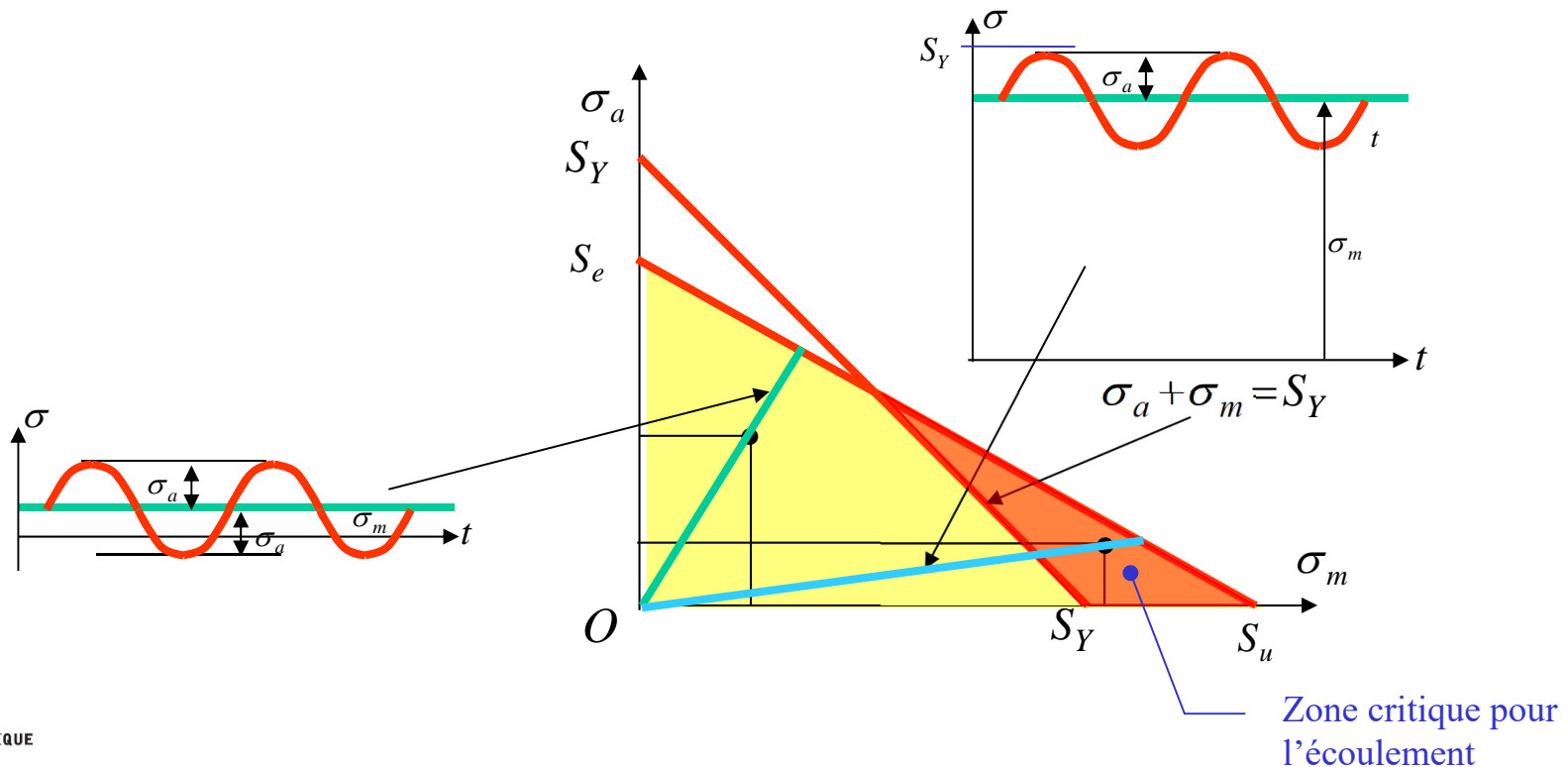
## Critère de Goodman : contrainte non-renversée

- Application d'un **facteur de sécurité** sur le critère de défaillance de Goodman



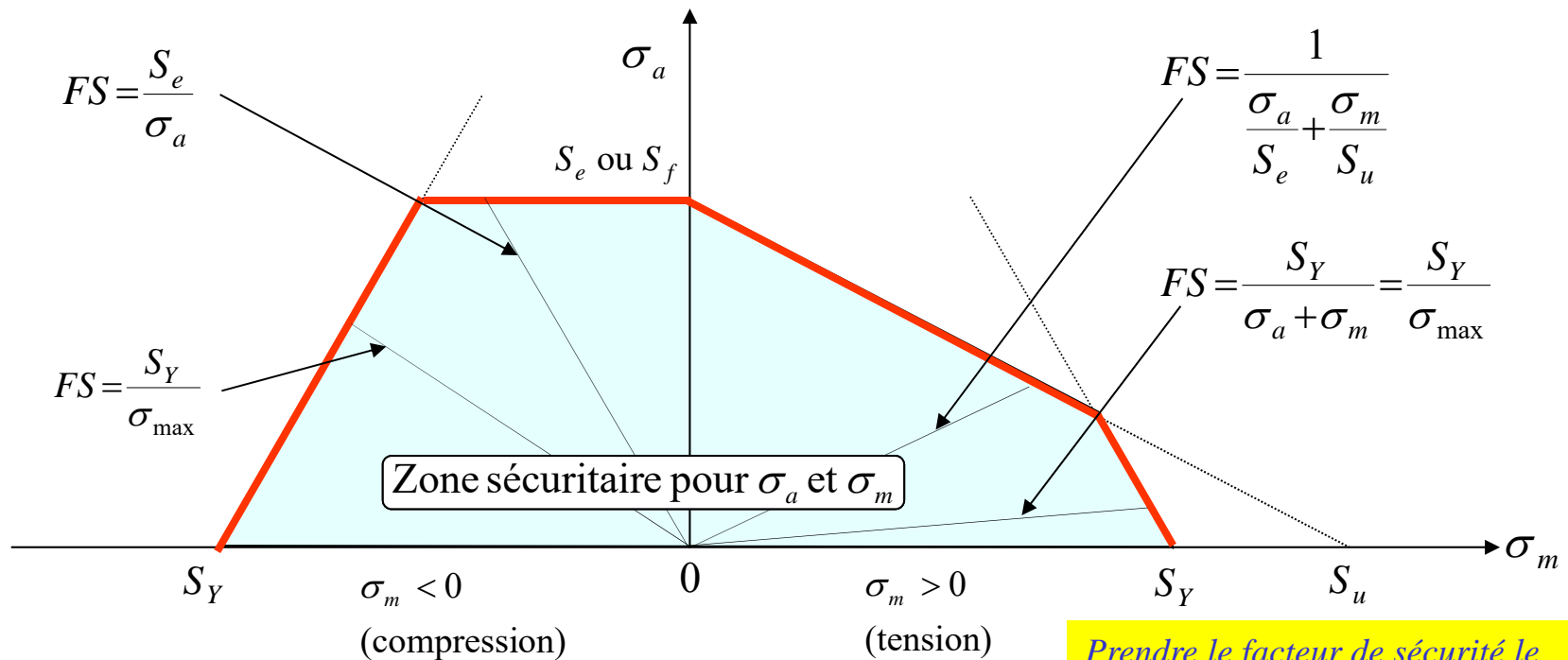
## Critère de Goodman modifié

- Lorsque la contrainte alternée est faible et que la contrainte moyenne est élevée, le critère d'écoulement doit être vérifié
- Illustration pour la vie infinie avec  $\sigma_m > 0$



## Critère de Goodman modifié

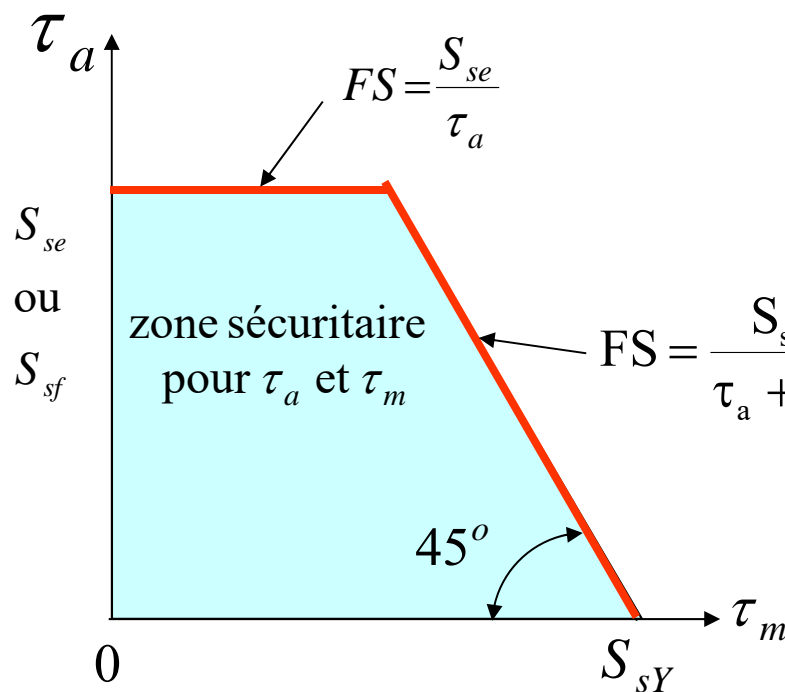
- Critère de défaillance de Goodman modifié pour les différentes combinaisons de  $\sigma_a$  et  $\sigma_m$  possibles



Prendre le facteur de sécurité le plus petit (fatigue vs. écoulement)

## Critère de Goodman modifié

En **cisaillement**, le diagramme de *Goodman* modifié est:



En cisaillement, la contrainte moyenne n'a pas d'effet sur la résistance en fatigue du matériau

*Vérifie l'écoulement avec  $\tau_{max}$  à un instant donné*

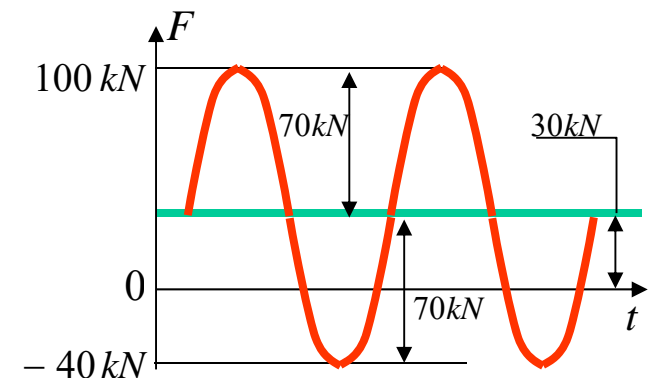
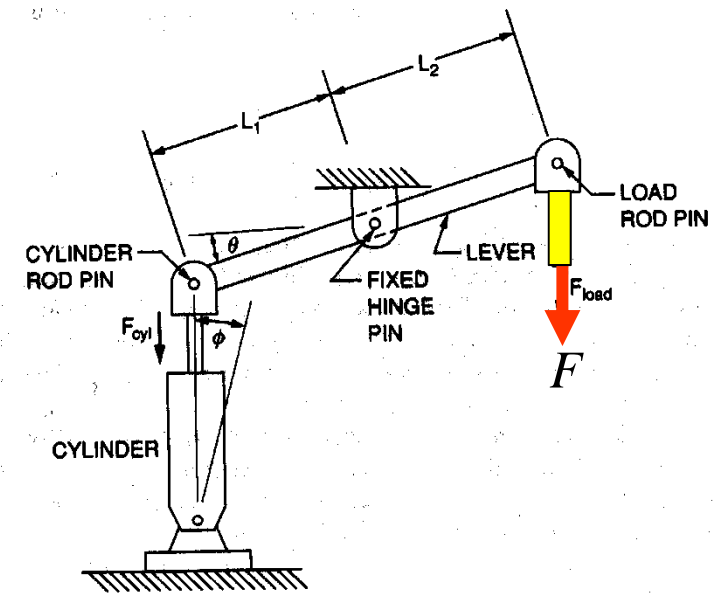
*Le facteur de sécurité est le plus petit des deux calculés ci-dessus.*

## Problème :

Le mécanisme suivant sert à régler les aubes directrices dans une turbine hydroélectrique. La force  $F$  sur la tige (fini de surface = poli) du mécanisme varie de  $-40 \text{ kN}$  à  $100 \text{ kN}$  dans le temps à la fréquence de  $1 \text{ Hz}$ . On veut que le mécanisme fonctionne 24 heures/jour, pendant au moins 5 ans avant faillite.

Tout le mécanisme est fabriqué en acier *inoxydable* S30400 pour lequel  $S_u = 585 \text{ MPa}$  et  $S_y = 240 \text{ MPa}$ .

- Doit-on calculer ce mécanisme en vie finie ou infinie?
- On demande le diamètre  $d$  de la tige verticale pour une fiabilité de 99,9% et  $FS = 2,5$ .





# Problème: diamètre de la tige

## Solution

- À 1 Hz, les cycles en 5 ans =  $157 \times 10^6$  cycles (**vie infinie**)
- Facteurs de correction
  - $k_a = 1,0$  fini poli miroir
  - $k_b = 1$  (chargement axial)
  - $k_c = 0,753$
  - $k_d = k_e = k_f = 1,0$
  - $S_e' = 0,5 S_u = 0,5 \times 585 = 292,5$  MPa
  - $S_e = 220,2$  MPa (diminution de 25% de la limite d'endurance)
- Chargement (en fonction de  $d$  en mm)

$$F_a = \frac{F_{\max} - F_{\min}}{2} = \frac{100 - (-40)}{2} = 70 \text{ kN}$$



$$\sigma_a = \frac{4 F_a}{\pi d^2} = \frac{4 \times 70 \times 10^3}{\pi d^2} = \frac{89 \times 10^3}{d^2} \text{ MPa}$$

$$F_m = \frac{F_{\max} + F_{\min}}{2} = \frac{100 - 40}{2} = 30 \text{ kN}$$



$$\sigma_m = \frac{4 F_m}{\pi d^2} = \frac{4 \times 30 \times 10^3}{\pi d^2} = \frac{38,2 \times 10^3}{d^2} \text{ MPa}$$





## Problème: diamètre de la tige

### Solution (suite)

- Critère de Goodman

$$FS = 2,5 = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u}} = \frac{1}{\frac{89 \times 10^3}{220,2 d^2} + \frac{38,2 \times 10^3}{585 d^2}} \Rightarrow d = 34,25 \text{ mm}$$

- Vérifier l'écoulement (en statique)

$$FS = 2,5 = \frac{S_Y}{\sigma_a + \sigma_m} = \frac{240}{\frac{(89 + 38,2) \times 10^3}{d^2}} \Rightarrow d = 36,4 \text{ mm}$$

*L'écoulement dicte le design de la tige*

## Problème:

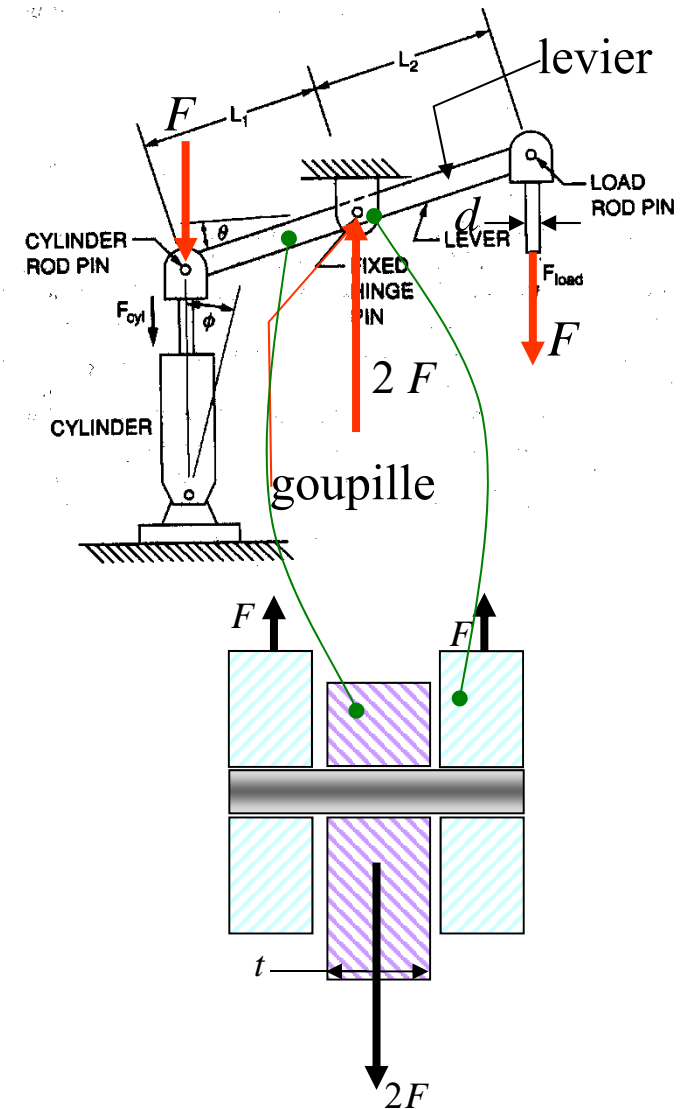
Si  $L_1 = L_2$  sur le levier, la force sur la goupille au centre du levier vaut  $2F = -80$  à  $200$  kN. Calculer le diamètre de la goupille au centre du levier.

## Solution :

- Même matériau que la tige ( $S_e = 165,2$  MPa)
- Limite d'endurance en cisaillement (selon Von Mises)

$$\bullet S_{se} = 0,577 S_e = 95,3 \text{ MPa et}$$

$$\bullet S_{sY} = 0,577 S_Y = 0,577 * 240 = 138,5 \text{ MPa}$$

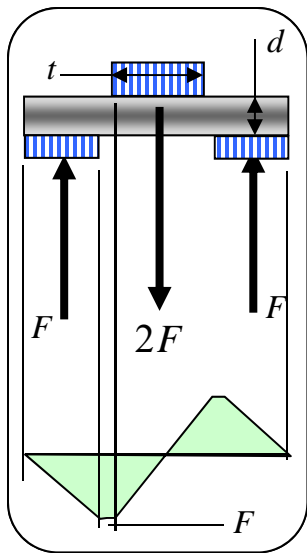


# Problème: Calcul de la goupille

## Solution (suite)

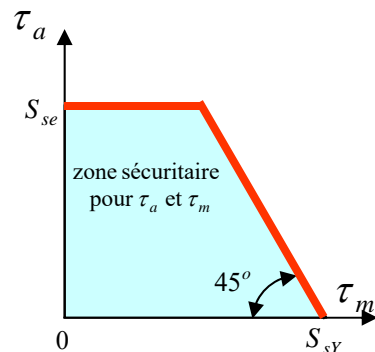
– Effort tranchant dans la goupille)

$$\tau_{\max} = \frac{VQ}{Ib} = \frac{4V}{3A} \quad \text{Au centre de la goupille}$$



$$V_a = \frac{V_{\max} - V_{\min}}{2} = \frac{100 - (-40)}{2} = 70 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \tau_a = \frac{4}{3} \cdot \frac{4F_a}{\pi d^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot 70}{\pi d^2} = \frac{118,9 \times 10^3}{d^2}$$

$$V_m = \frac{V_{\max} + V_{\min}}{2} = \frac{100 - 40}{2} = 30 \text{ kN} \quad \Rightarrow \quad \tau_m = \frac{4}{3} \cdot \frac{4F_a}{\pi d^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4 \cdot 30}{\pi d^2} = \frac{50,9 \times 10^3}{d^2}$$

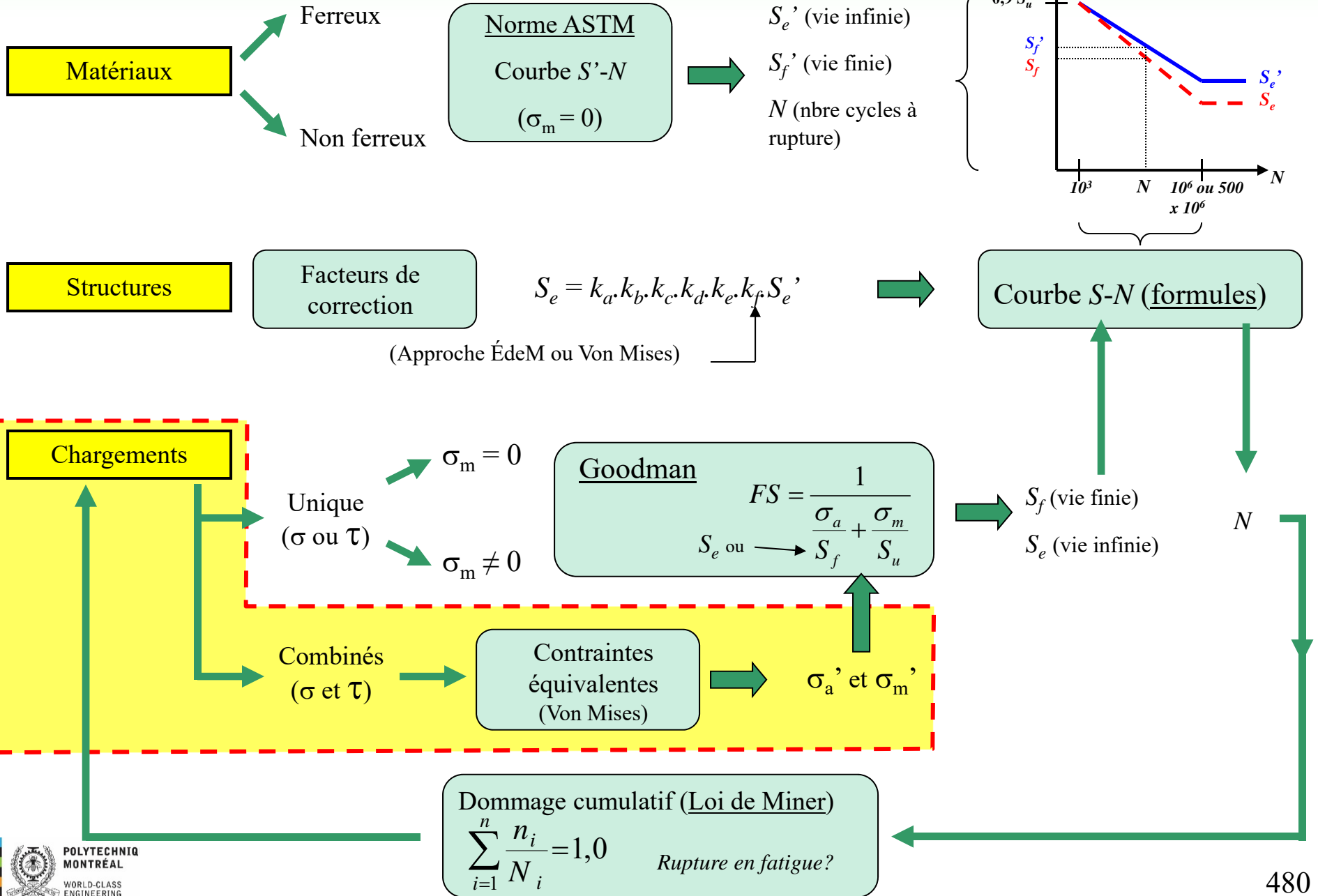


$$FS = 2,5 = \frac{S_{se}}{\tau_a} = \frac{95,3 \cdot d^2}{118,9 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad d = 55,8 \text{ mm} \quad \text{Fatigue (dicte le design)}$$

$$FS = 2,5 = \frac{S_{sY}}{\tau_a + \tau_m} = \frac{138,5 \cdot d^2}{118,9 \times 10^3 + 50,9 \times 10^3} \quad \Rightarrow \quad d = 55,4 \text{ mm} \quad \text{Écoulement}$$

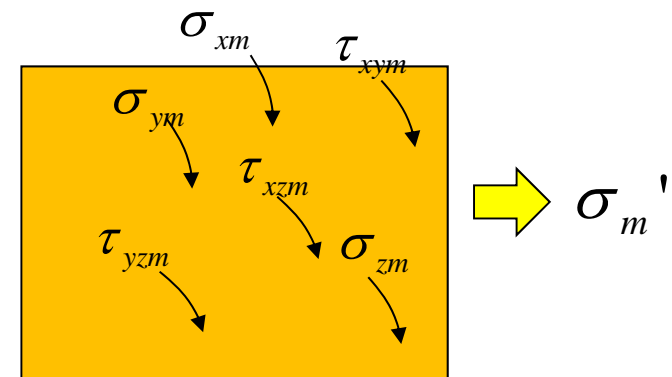
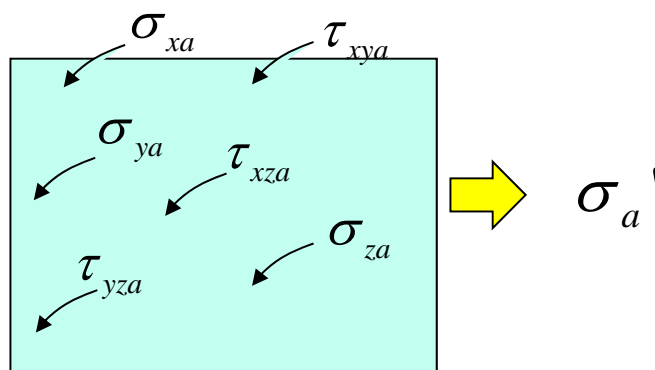
# Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



## Chargements combinés

- Que fait-on lorsque des contraintes normales et de cisaillement sont présentes en même temps au même point?  
(ex. flexion et torsion dans un arbre)
- Il faut calculer les **contraintes équivalentes de Von Mises** (basée sur l'énergie de distorsion) à partir des composantes alternées et moyennes des contraintes.
  1. Regrouper toutes les contraintes alternées et moyennes ensemble
  2. Calculer les contraintes Von Mises alternées ( $\sigma_a'$ ) et moyennes ( $\sigma_m'$ )



## Chargements combinés

- **Contraintes équivalentes de Von Mises** à partir des composantes alternées et moyennes des contraintes.
  - Contrainte alternée de Von Mises ( $\sigma_a'$ )

$$\sigma_a' = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 \right] + 3 \left[ \tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2 \right]}$$

*Si on développe, on obtient*

$$\sigma_a' = \sqrt{\left[ (\sigma_{xa}^2 + \sigma_{ya}^2 + \sigma_{za}^2) - (\sigma_{xa}\sigma_{ya} + \sigma_{ya}\sigma_{za} + \sigma_{za}\sigma_{xa}) \right] + 3 \left[ \tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2 \right]}$$

*Pour un état plan de contrainte (surface z), on obtient*

$$\sigma_a' = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + \sigma_{ya}^2 - \sigma_{xa}\sigma_{ya} + 3\tau_{xya}^2}$$



## Chargements combinés

- **Contraintes équivalentes de Von Mises** à partir des composantes alternées et moyennes des contraintes.
  - Contrainte moyenne de Von Mises ( $\sigma_m'$ )

$$\sigma_m' = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xm} - \sigma_{ym})^2 + (\sigma_{ym} - \sigma_{zm})^2 + (\sigma_{zm} - \sigma_{xm})^2 \right] + 3 \left[ \tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{zxm}^2 \right]}$$

*Si on développe, on obtient*

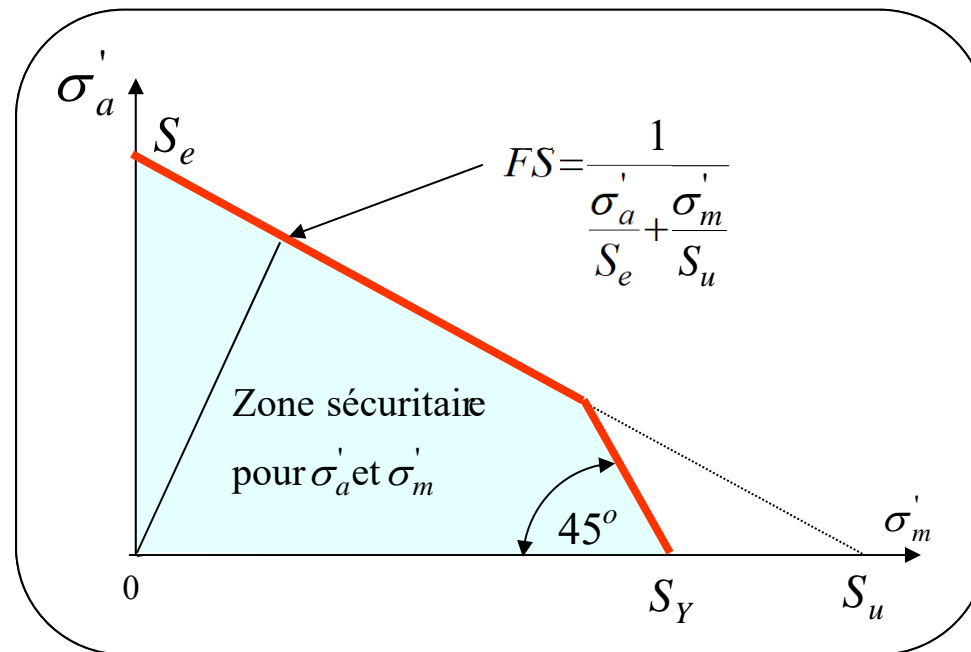
$$\sigma_m' = \sqrt{\left[ (\sigma_{xm}^2 + \sigma_{ym}^2 + \sigma_{zm}^2) - (\sigma_{xm}\sigma_{ym} + \sigma_{ym}\sigma_{zm} + \sigma_{zm}\sigma_{xm}) \right] + 3 \left[ \tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{zxm}^2 \right]}$$

*Pour un état plan de contrainte (surface z), on obtient*

$$\sigma_m' = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + \sigma_{ym}^2 - \sigma_{xm}\sigma_{ym} + 3\tau_{xym}^2}$$

## Chargements combinés

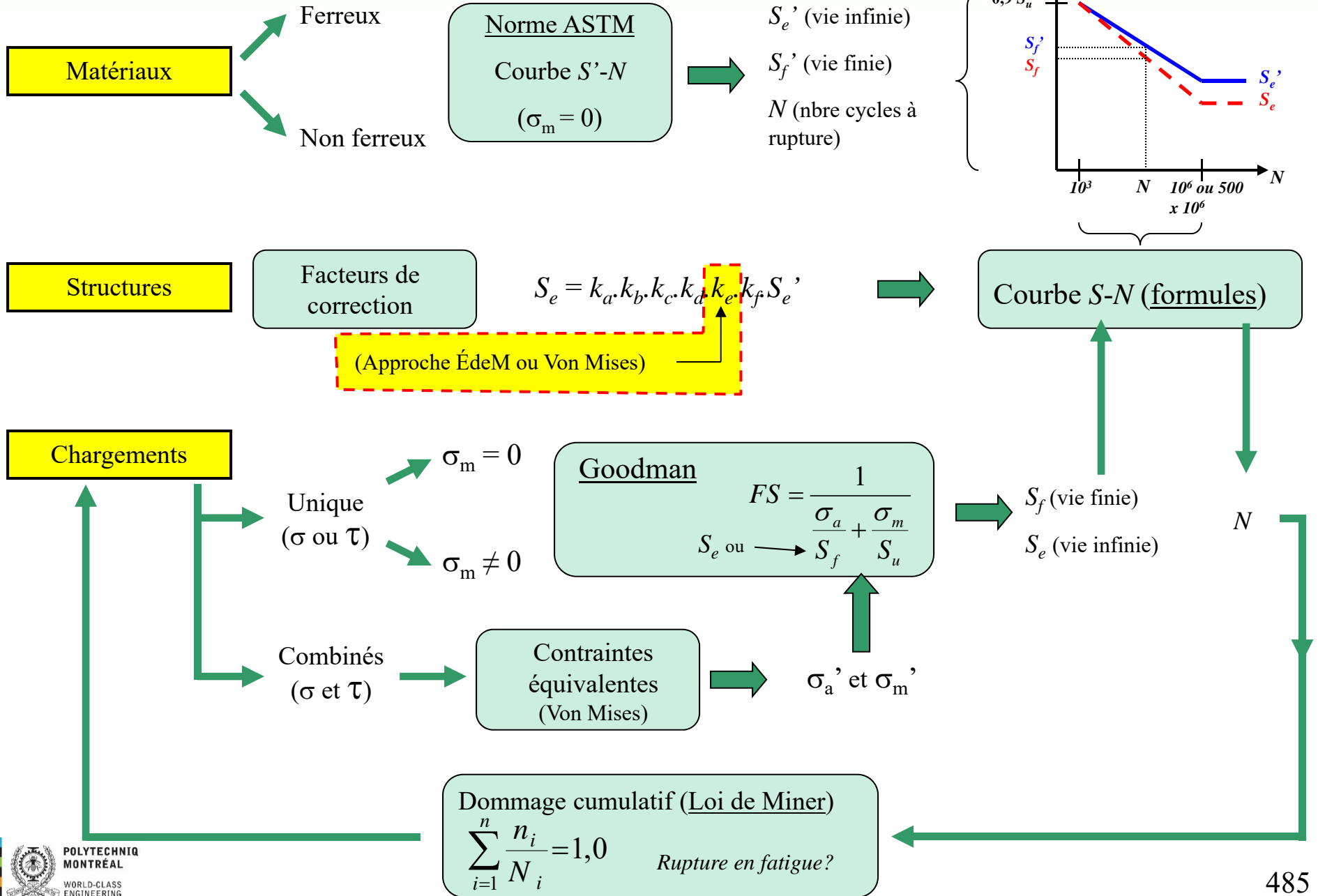
- Puisque les contraintes équivalentes de Von Mises sont toujours positives, le diagramme du critère de Goodman modifié devient alors (exemple pour vie infinie)





# Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- $k_e$  : Effet de concentration de contrainte
  - En fatigue, on définit le facteur de concentration de contrainte

$$K_f = \frac{\text{limite d'endurance sans concentration}}{\text{limite d'endurance avec concentration}}$$

- Contrairement au facteur de concentration de contrainte statique ( $K_t$ )
  - $K_f$  divise la résistance alors que  $K_t$  multiplie la contrainte
  - $K_f$  est corrigé par un facteur supplémentaire  $q$  appelé **sensibilité à l'entaille** ce qui le rend **fonction du matériau** en plus de la géométrie et du mode de chargement

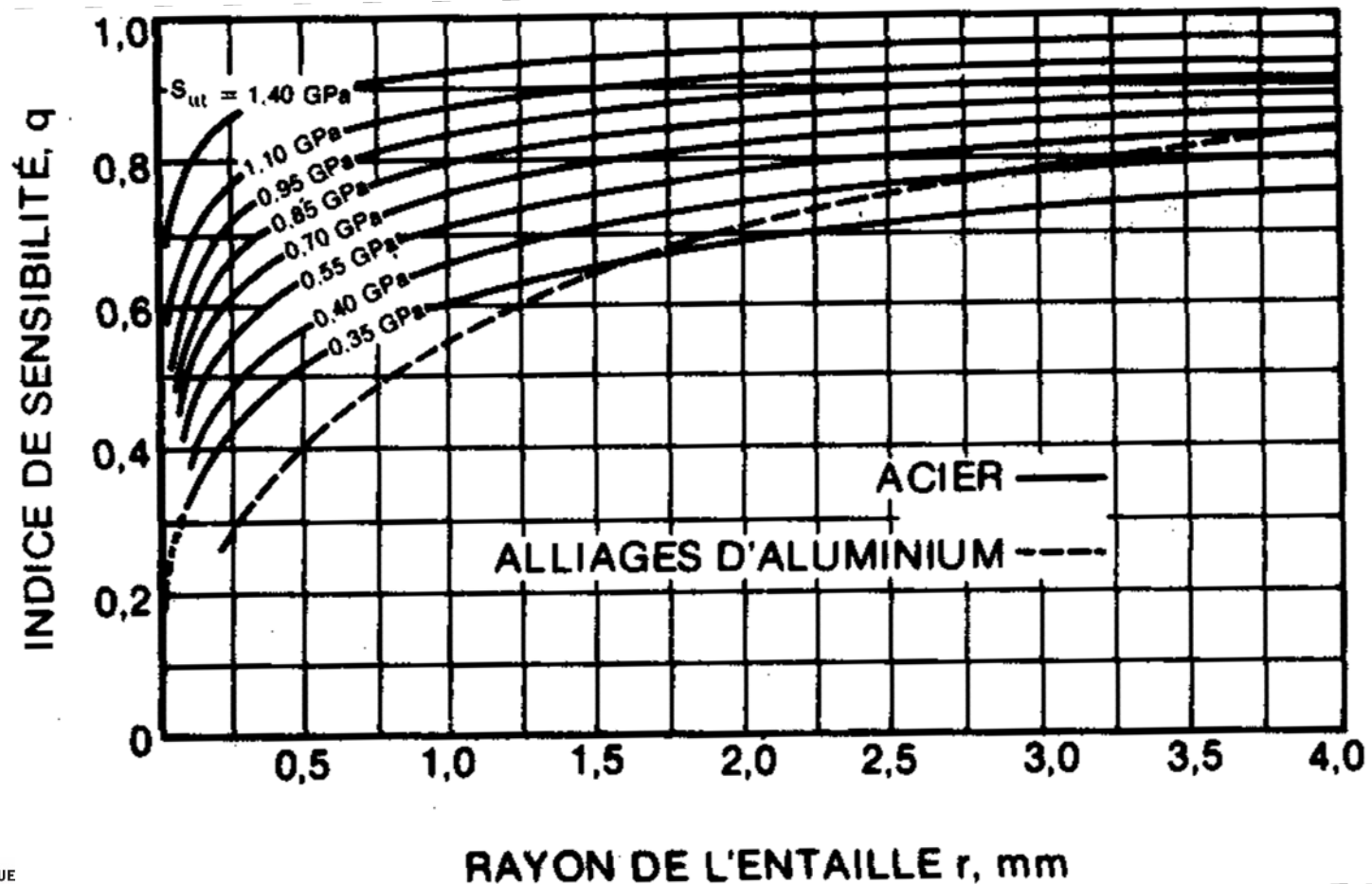
- Pour les calculs en fatigue, on utilise  $k_e$

*où  $q$  est la sensibilité d'un matériau à l'effet d'une concentration de contrainte*

$$k_e = \frac{1}{K_f} = \frac{1}{q(K_t - 1) + 1}$$

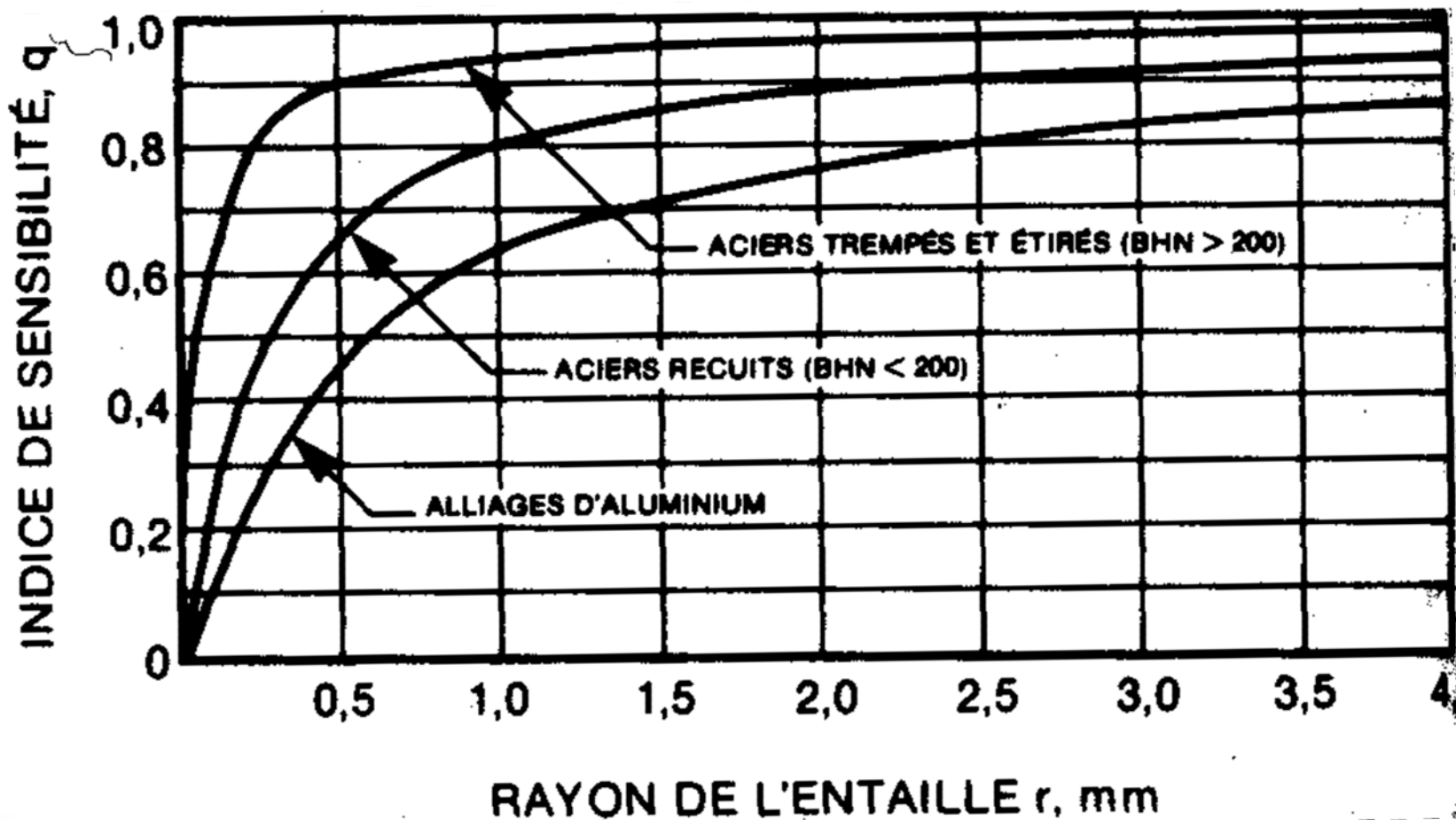
## Facteurs de correction ( $S_e$ )

Sensibilité à l'entaille  $q$  pour les contraintes normales



## Facteurs de correction ( $S_e$ )

Sensibilité à l'entaille  $q$  pour les contraintes de cisaillement



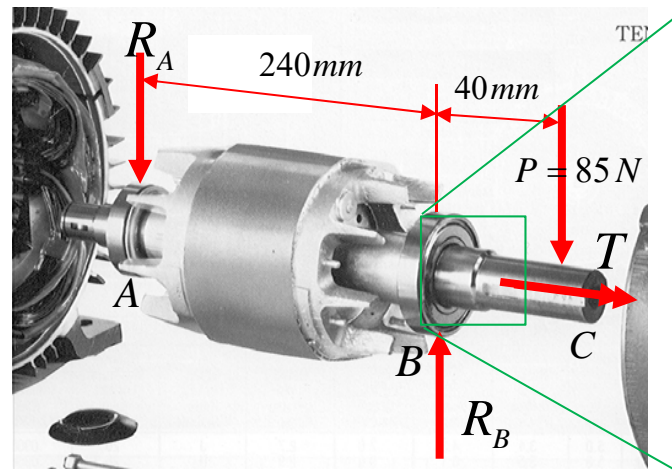
# Exemple

## Retour sur problème de l'arbre du moteur

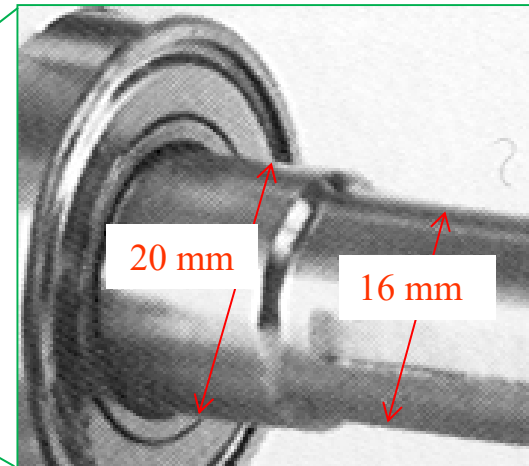
- L'arbre du moteur d'une soufflante est usiné dans un acier au carbone G10150, dureté  $H_B = 111$  et pour lequel  $S_Y = 190$  MPa et  $S_u = 340$  MPa. Pour cette application, l'ingénieur juge qu'une fiabilité de 90% est adéquate. En opération, l'arbre peut atteindre une température de  $80^\circ\text{C}$ . Quelle est la valeur de  $S_e$ ?



Image de la soufflante



Arbre et chargement externe



Dimensions de l'arbre

# Exemple

## Retour sur problème de l'arbre du moteur

- Solution:**

- Effet de concentration de contrainte
- Chargement de flexion et torsion

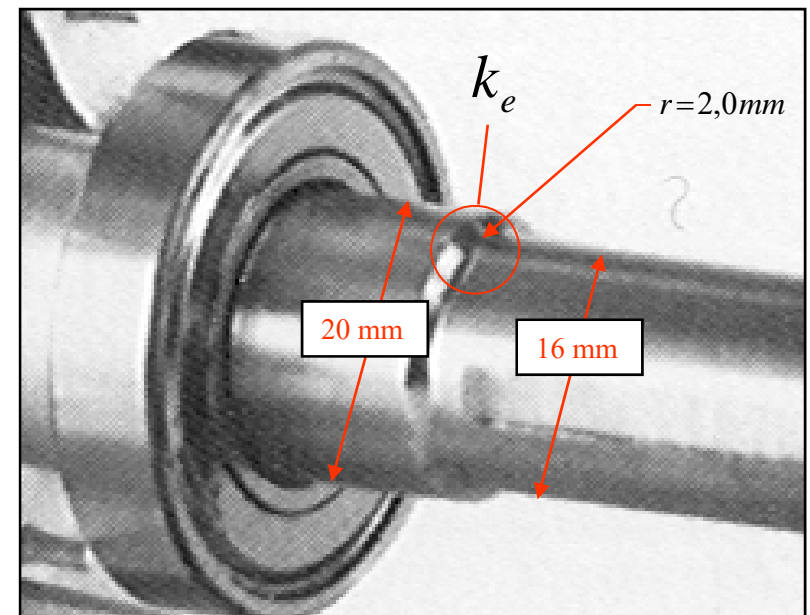
$$r = 2,0\text{mm} \quad d = 16\text{mm} \quad D = 20\text{mm}$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{r}{d} = \frac{2,0}{16} = 0,125 \\ \frac{D}{d} = \frac{20}{16} = 1,25 \end{array} \right\} \begin{array}{l} K_{tf} \approx 1,55 \text{ flexion} \\ K_{ts} \approx 1,30 \text{ torsion} \end{array}$$

*Rappel des abaques de  $K_t$  à la page suivante*

*Pour  $r = 2 \text{ mm}$ ,  $H_B = 111$  et flexion  $q_f \approx 0,70$*

*Pour  $r = 2 \text{ mm}$ ,  $H_B = 111$  et torsion  $q_s \approx 0,90$*



*Au changement de section*

# Exemple

## Retour sur problème de l'arbre du moteur

- Solution:

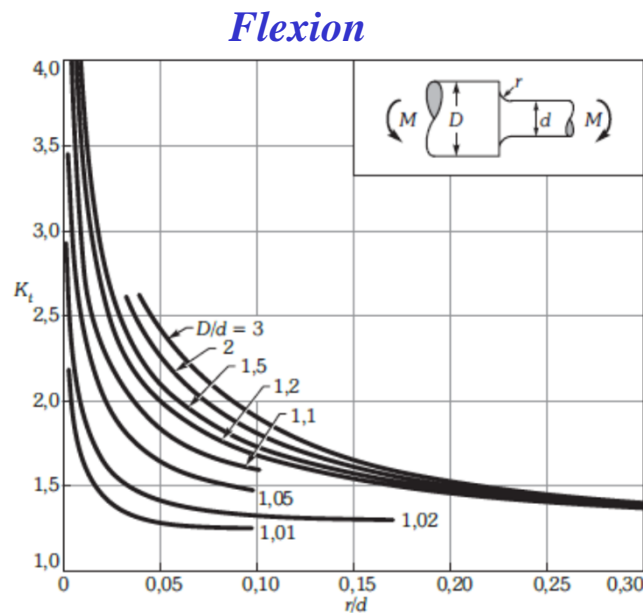


Figure D.10 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une flexion.

$$\sigma_{nom} = M(d/2)/(\pi d^4/64)$$

$$k_{ef} = \frac{1}{q_f(K_{tf} - 1) + 1} = \frac{1}{0,7(1,55 - 1) + 1} = 0,722$$

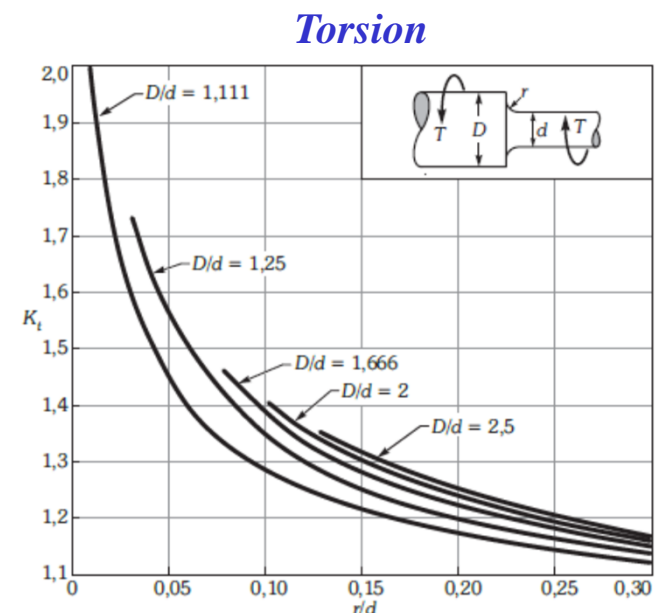


Figure D.12 Barreau cylindrique avec épaulement, soumis à une torsion.

$$\tau_{nom} = T(d/2)/(\pi d^4/32)$$

$$k_{es} = \frac{1}{q_s(K_{ts} - 1) + 1} = \frac{1}{0,9(1,30 - 1) + 1} = 0,787$$

Quelle valeur de  $k_e$  faut-il utiliser? **Il y a deux approches**





## Facteurs de correction ( $S_e$ )

- Utilisation de  $k_e$  dans les calculs de fatigue: 2 approches
  1. Celle du manuel **ÉLÉMENTS DE MACHINES** :
    - On applique la valeur la plus sévère de  $k_e$  au calcul de  $S_e$ .
    - Les contraintes alternées et moyennes sont calculées sans **prendre en compte le facteur de concentration de contrainte**.
  2. Celle de **VON MISES** :
    - La valeur de  $k_e = 1$  est utilisée pour le calcul de  $S_e$ .
    - Le facteur de concentration de contrainte est appliqué sur la contrainte plutôt qu'au calcul de  $S_e$ . Chaque composante de contrainte alternée et moyenne est alors calculée en tenant compte du facteur de concentration de contrainte approprié (on divise par le  $k_e$  approprié).



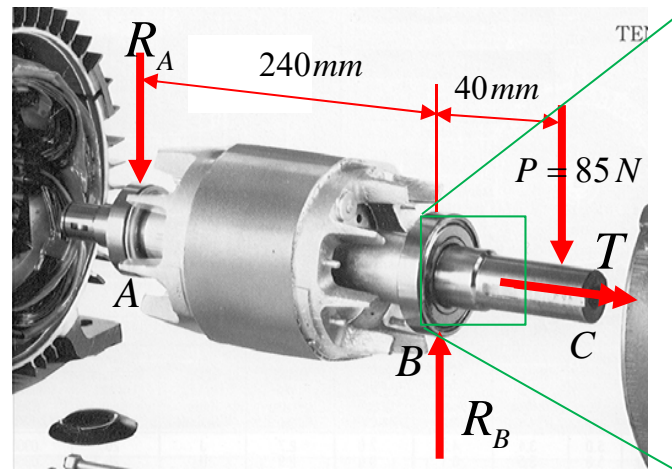
# Exemple

## Retour sur problème de l'arbre du moteur

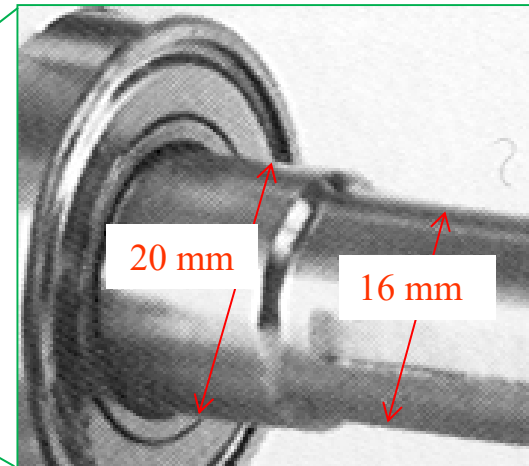
- L'arbre du moteur d'une soufflante est usiné dans un acier au carbone G10150, dureté  $H_B = 111$  et pour lequel  $S_Y = 190$  MPa et  $S_u = 340$  MPa. Pour cette application, l'ingénieur juge qu'une fiabilité de 90% est adéquate. En opération, l'arbre peut atteindre une température de  $80^\circ\text{C}$ . Quelle est la valeur de  $S_e$ ?



*Image de la soufflante*



*Arbre et chargement externe*



*Dimensions de l'arbre*

# Exemple

## Retour sur problème de l'arbre du moteur

### Chargement en flexion et torsion

(1)  $k_e$  le plus sévère

$$k_{ef} = 0,722$$

$$k_{es} = 0,787$$

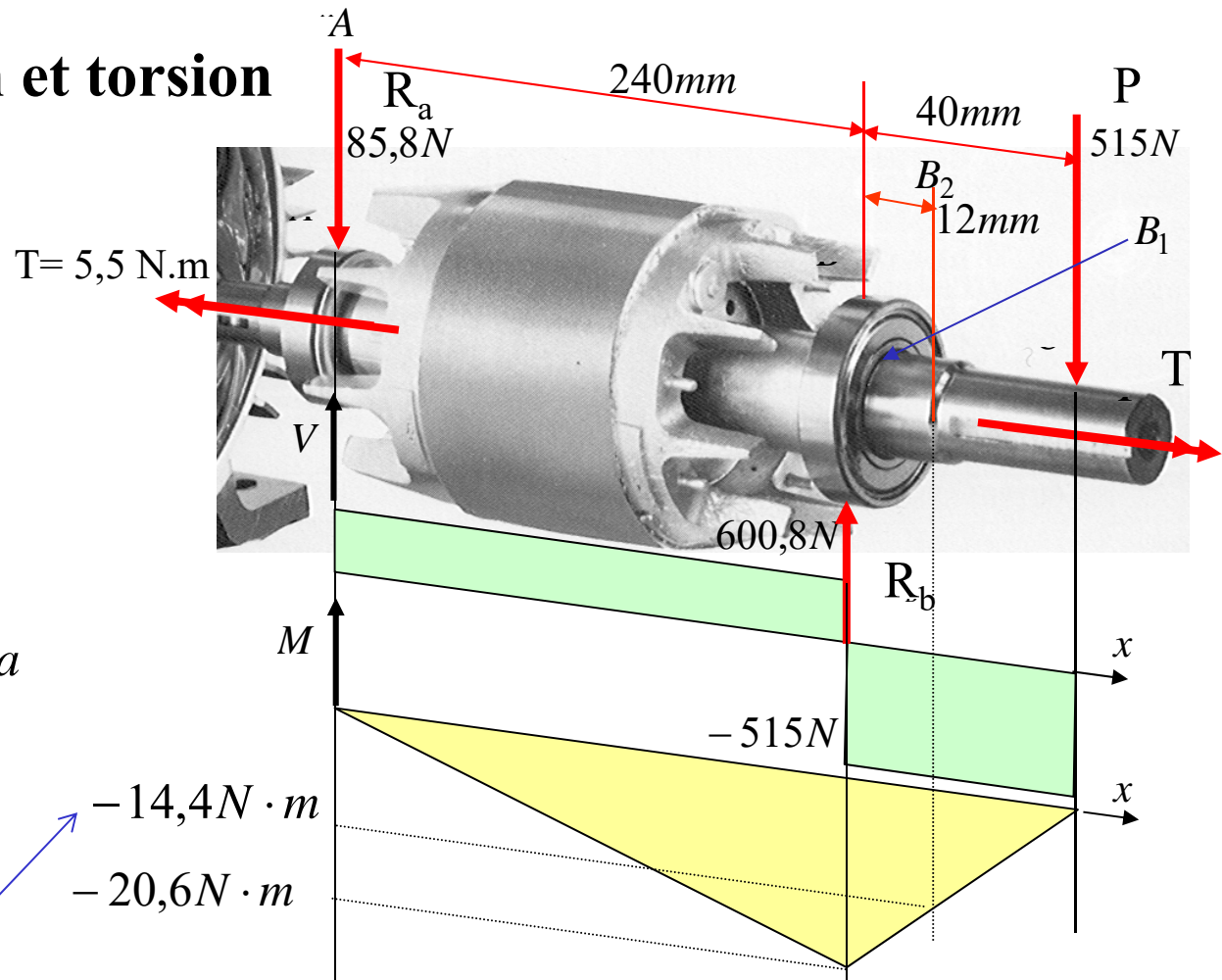
Appliqué  $k_e$  sur  $S_e$

$$S_e = 0,88 \times 0,85 \times 0,9 \times 0,975$$

$$\times 0,722 \times 1,0 \times 170 = 80,6 \text{ MPa}$$

*Diminue la résistance du matériau*

*Moment de flexion au point d'intérêt*



Diagrammes  $V$  et  $M$  de l'arbre



# Solution

## Approche Éléments de machines

### Chargement en flexion et torsion

(2) Calculs des contraintes Von Mises (aucun effet de concentration de contrainte)

-  $T = 5,5 \text{ N}\cdot\text{m}$  (constant),  $M = 14,4 \text{ N}\cdot\text{m}$  (flexion rotative),

- le diamètre est  $d = 16 \text{ mm}$

$$\sigma_{xa} = \frac{Mc}{I} = \frac{14,4 \times 10^3 \cdot 8}{\frac{\pi \cdot 16^4}{64}} = 35,8 \text{ MPa} \quad \sigma_{\theta a} = 0$$
$$\tau_{x\theta m} = \frac{Tr}{J} = \frac{5,5 \times 10^3 \cdot 8}{\frac{\pi \cdot 16^4}{32}} = 6,8 \text{ MPa}$$

*Contraintes équivalentes*

$$\sigma'_a = \sqrt{\sigma_{xa}^2 + 3\tau_{x\theta a}^2} = \sqrt{35,8^2 + 0} = 35,8 \text{ MPa}$$

$$\sigma'_m = \sqrt{\sigma_{xm}^2 + 3\tau_{x\theta m}^2} = \sqrt{0 + 3 \cdot 6,8^2} = 11,8 \text{ Pa}$$

*Appliquer le critère de Goodman*

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma'_a}{S_e} + \frac{\sigma'_m}{S_u}} = \frac{1}{\frac{35,8}{80,6} + \frac{11,8}{340}} = 2,1$$

*Utiliser  $k_e$  ici*



# Solution

## Approche Von Mises

### Chargement en flexion et torsion

(1)  $k_e = 1$  pour calculer  $S_e$

$$S_e = 0,88 \times 0,85 \times 0,9 \times 0,975 \times 1,0 \times 1,0 \times 170 = 111,6 \text{ MPa}$$

(2) Utiliser le  $k_e$  approprié pour amplifier les contraintes

$$\sigma_{xa}^* = \frac{Mc}{k_{ef}I} = \frac{14,4 \times 10^3 \times 8}{0,722 \times \frac{\pi \times 16^4}{64}} = 49,6 \text{ MPa} \quad \sigma_{\theta a} = 0$$

$$\tau_{x\theta m}^* = \frac{Tr}{k_{es}J} = \frac{5,5 \times 10^3 \times 8}{0,787 \times \frac{\pi \times 16^4}{32}} = 8,6 \text{ MPa}$$

*Contraintes équivalentes*

$$\sigma_a' = \sqrt{\sigma_{xa}^{*2} + 3\tau_{x\theta a}^{*2}} = \sqrt{49,6^2 + 0} = 49,6 \text{ MPa}$$

$$\sigma_m' = \sqrt{\sigma_{xm}^{*2} + 3\tau_{x\theta m}^{*2}} = \sqrt{0 + 3 \times 8,6^2} = 14,9 \text{ Pa}$$

Utiliser  $k_e$  ici

*Appliquer le critère de Goodman*

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a'}{S_e} + \frac{\sigma_m'}{S_u}} = \frac{1}{\frac{49,6}{111,6} + \frac{14,9}{340}} = 2,0$$



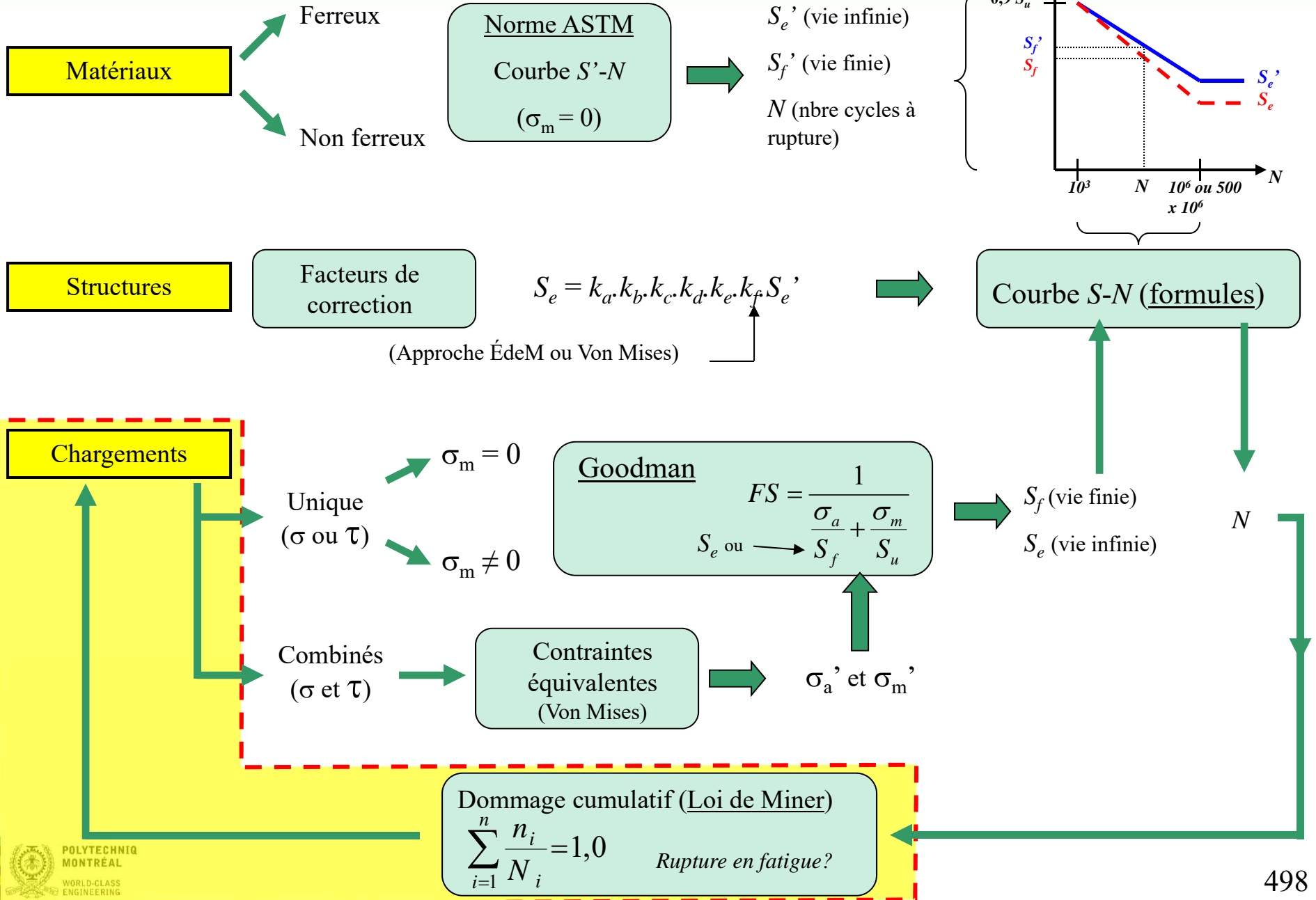
# Solution

# Conclusion

- Facteur de sécurité avec les deux approches
  - Éléments de machines  $FS = 2,1$
  - Von Mises  $FS = 2,0$
  - Le FS est essentiellement le même et égal à 2 dans les deux cas. En général, l'approche Éléments de machines est toujours moins sévère que celle de Von Mises.

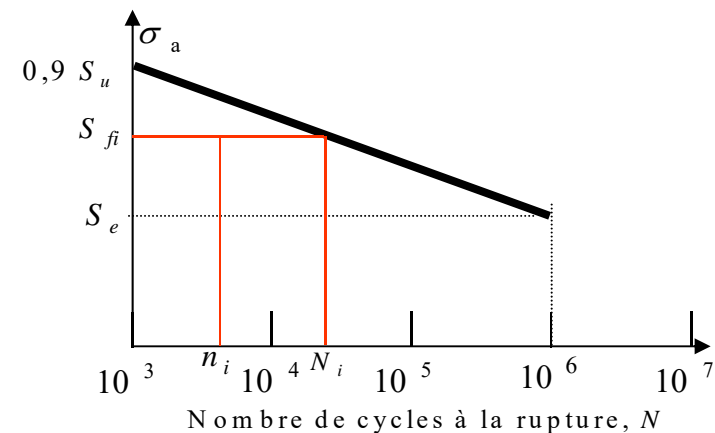
# Diagramme de l'analyse en fatigue

Par D. Therriault (Avril 2005)



## Loi de Miner

- Cumul de dommage
  - Concerne uniquement la vie finie (entre  $10^3$  et  $10^6$  cycles pour ferreux et  $10^3$  et  $5 \times 10^8$  pour non-ferreux)
  - En vie finie, une pièce soumise à une contrainte **complètement renversée**  $S_{fi}$  peut supporter  $N_i$  cycles avant de briser.
  - Si seulement  $n_i$  cycles sont appliqués, la pièce aura épuisé une fraction de sa vie égale à  $n_i / N_i$ .



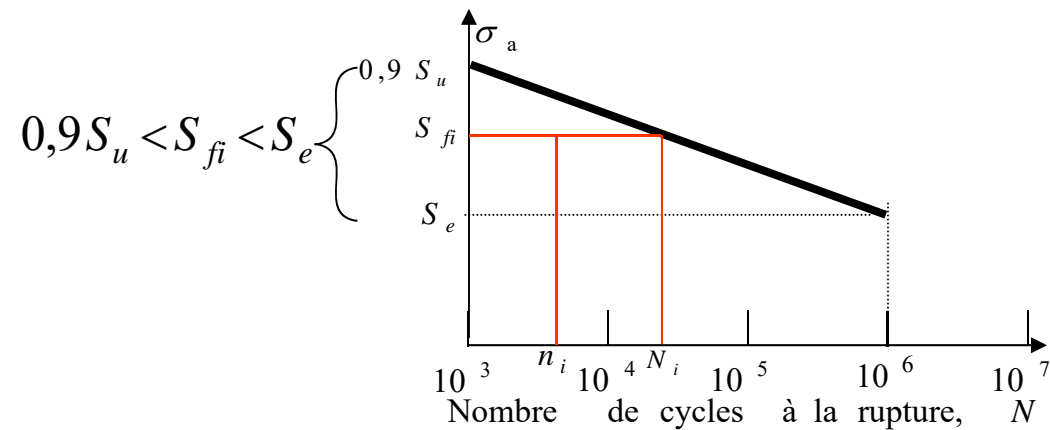
*Vie finie pour matériaux ferreux*

## Loi de Miner

- Cumul de dommage (suite)
  - Si la pièce est soumise à une succession  $S_{f1}, S_{f2} \dots S_{fi} \dots S_{fn}$  de contraintes **complètement renversées** pour des cycles  $n_1, n_2 \dots n_i \dots n_n$ , cette pièce se rupturera lorsque

Loi de *Miner*

$$\sum_{i=1}^n \frac{n_i}{N_i} = 1,0$$



*Vie finie pour matériaux ferreux*



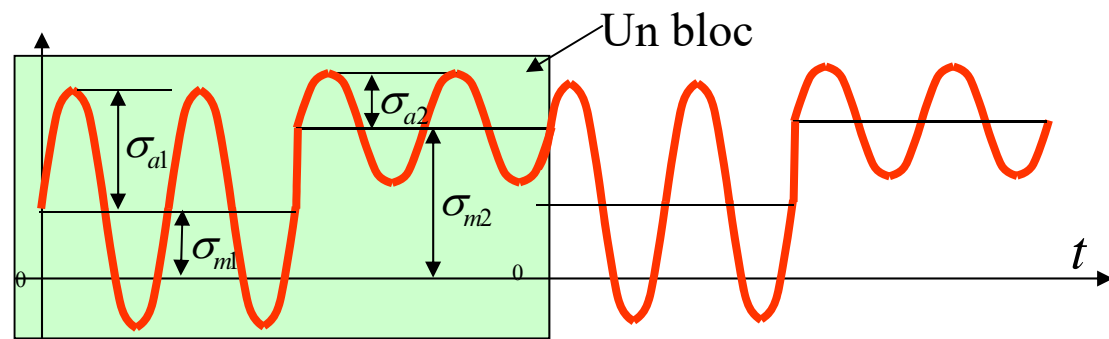
## Exemple (Loi de Miner)

Une structure fabriquée d'un acier G1035 pour lequel  $S_u = 555$  MPa,  $S_Y = 460$  MPa et  $S_e = 75$  MPa subit des chargements qui se répètent par blocs et qui induisent des contraintes **non complètement renversées** de :

1-  $\sigma_{a1} = 150$  MPa et  $\sigma_{m1} = 140$  MPa durant  $n_1 = 2000$  cycles

2-  $\sigma_{a2} = 85$  MPa et  $\sigma_{m2} = 220$  MPa durant  $n_2 = 5000$  cycles

Combien de blocs de chargements la pièce pourra-t-elle supporter avant de se rompre?



## Exemple (Loi de Miner)

**Solution :**

On calcule :

$$S_{f1} = \frac{\sigma_{a1}}{1 - \frac{\sigma_{m1}}{S_u}} = \frac{150}{1 - \frac{140}{555}} = 200 \text{ MPa}$$

$$N_1 = 10^3 \left[ \frac{S_{f1}}{0,9 S_u} \right]^{\frac{3}{\log(S_e/0,9 S_u)}} = 10^3 \left[ \frac{200}{500} \right]^{\frac{3}{\log(75/500)}} = 28,1 \times 10^3 \text{ cycles}$$

$$\frac{n_1}{N_1} = \frac{2000}{28100} = 0,071$$

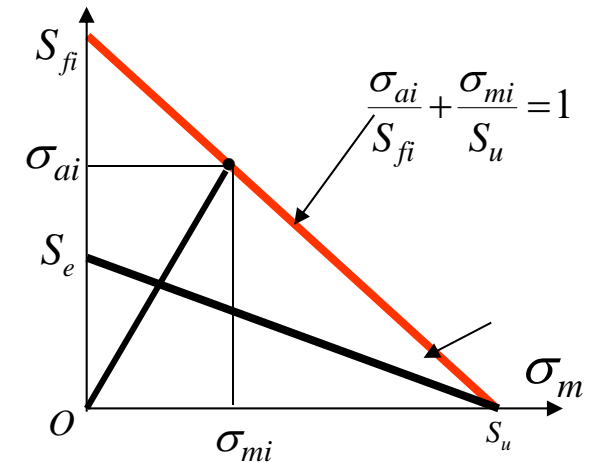
**Au niveau 2**

$$S_{f2} = \frac{\sigma_{a2}}{1 - \frac{\sigma_{m2}}{S_u}} = \frac{85}{1 - \frac{220}{555}} = 141 \text{ MPa}$$

$$N_2 = 10^3 \left[ \frac{S_{f2}}{0,9 S_u} \right]^{\frac{3}{\log(S_e/0,9 S_u)}} = 10^3 \left[ \frac{141}{500} \right]^{\frac{3}{\log(75/500)}} = 100,4 \times 10^3 \text{ cycles}$$

$$\frac{n_2}{N_2} = \frac{5000}{100400} = 0,05$$

$$N^0 \text{ blocs} = \frac{1}{\sum \frac{n_i}{N_i}} = \frac{1}{0,071 + 0,05} = 8,26 \Rightarrow 8$$



# Formulaire type à l'examen

## Section 7 : Fatigue

Critère de Goodman

$$\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

$$\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u} = 1$$

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_e} + \frac{\sigma_m}{S_u}}$$

$$FS = \frac{1}{\frac{\sigma_a}{S_f} + \frac{\sigma_m}{S_u}}$$

Facteur de correction

$$k_e = \frac{1}{q(K_t - 1) + 1}$$

Matériaux ferreux

$$N = 1000 \left( \frac{S_f}{0,9S_u} \right)^{\frac{3}{\log\left(\frac{S_e}{0,9S_u}\right)}}$$

$$\frac{S_f}{0,9S_u} = \left( \frac{S_e}{0,9S_u} \right)^{\frac{\log N - 3}{3}}$$

Matériaux non ferreux

$$N = 1000 \left( \frac{S_f}{0,9S_u} \right)^{\frac{5,7}{\log\left(\frac{S_e}{0,9S_u}\right)}}$$

$$\frac{S_f}{0,9S_u} = \left( \frac{S_e}{0,9S_u} \right)^{\frac{\log N - 3}{5,7}}$$

Contraintes équivalentes

$$\sigma_{a'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xa} - \sigma_{ya})^2 + (\sigma_{ya} - \sigma_{za})^2 + (\sigma_{za} - \sigma_{xa})^2 \right] + 3(\tau_{xya}^2 + \tau_{yza}^2 + \tau_{zxa}^2)}$$

$$\sigma_{m'} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[ (\sigma_{xm} - \sigma_{ym})^2 + (\sigma_{ym} - \sigma_{zm})^2 + (\sigma_{zm} - \sigma_{xm})^2 \right] + 3(\tau_{xym}^2 + \tau_{yzm}^2 + \tau_{zxm}^2)}$$

$$\sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i} = 1$$

$$n_r = N_r \left( 1 - \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{N_i} \right)$$







